Näherungskonstruktionen für den Kreisumfang

Autor(en): **Finsler, P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **14 (1959)**

Heft 6

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-20324

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XIV Nr. 6 Seiten 121–144 Basel, 10. November 1959

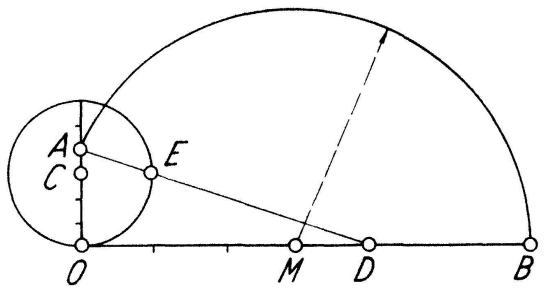
Näherungskonstruktionen für den Kreisumfang

Die bekannteste praktisch brauchbare Näherungskonstruktion für den *halben* Kreisumfang ist wohl die von KOCHANSKI, welche mit dem Lineal und nur *einer* Zirkelöffnung auskommt [1][1]). Dieser letztere Vorteil wird jedoch hinfällig, wenn man den ganzen Kreisumfang sucht oder ihn als Abwicklung auf einer Tangente vom Berührungspunkt aus abtragen will. Der relative Fehler der Konstruktion ist ungefähr 1/53000, also praktisch hinreichend klein.

Für den *ganzen* Kreisumfang gibt es eine Konstruktion, welche zwar theoretisch etwa den doppelten relativen Fehler liefert, praktisch aber (wegen besserer Schnitte) eher genauer sein dürfte als jene [2]. Zwischen andern Konstruktionen versteckt, ist sie wohl nicht viel beachtet worden; etwas modifiziert, ist sie aber sehr bequem, und zudem lässt sie sich, wie hier gezeigt werden soll, mit einer kleinen Zusatzkonstruktion theoretisch noch so verschärfen, dass der relative Fehler weniger als ein Milliardstel beträgt.

Die Konstruktion besteht zunächst in folgendem:

Auf der Tangente des Kreises vom Radius r trage man vom Berührungspunkt O aus die Strecke $OM = 3\,r$ und auf dem dazu senkrechten Kreisdurchmesser die Strecke $OA = {}^4/_3\,r$ ab. Verlängert man OM um $MB = MA$, so ist OB genähert gleich der Abwicklung des Kreises.



Den Punkt A kann man konstruieren, indem man, wenn C den Mittelpunkt des Kreises bedeutet, auf der Tangente $OD = 4\,r$, also $MD = r$ macht und $DA \parallel MC$ zieht. Diese Parallele trifft übrigens den Kreis in einem Punkt E, der von der Tangente den Abstand r besitzt.

Einfacher ist es jedoch, wenn man den Radius r des Kreises gleich 3 Einheiten wählt und zu OC noch eine Einheit CA hinzufügt. Wenn man insbesondere auf einem karierten Blatt oder einer karierten Tafel, also kurz in einer Gitterebene zeichnet und den Radius r gleich 3 Gittereinheiten wählt, so sind M und A leicht zu

[1]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 123.

findende Gitterpunkte, und die ganze Konstruktion beschränkt sich auf das Ziehen *eines einzigen Kreisbogens* um M durch A nach B.

Der relative Fehler der Konstruktion ist sehr nahe 1/27000. Bei einem Kreisumfang von 30 cm ist also der Fehler $^1/_{90}$ mm, bei 3 m Umfang $^1/_9$ mm, er ist also weder auf dem Blatt noch auf der Tafel bemerkbar. Da man zudem nur genau einen senkrechten Schnitt erhält, lässt bei hinreichend genauer Gitterebene auch die praktische Genauigkeit nichts zu wünschen übrig.

Die Konstruktion lässt sich zum Beispiel mit Vorteil verwenden, um für eine auf ihrem Zylinder gegebene Schraubenlinie die Abwickelung und damit auch die Länge und den Neigungswinkel zu erhalten. Auch beim Zeichnen von Zykloiden leistet sie gute Dienste.

Der aus der Konstruktion sich ergebende Näherungswert

$$x = \frac{3}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{97} = 3{,}141476\ldots$$

für $\pi = 3{,}141593\ldots$ genügt der Gleichung

$$9x^2 - 27x - 4 = 0.$$

Bei CAVALLARO findet sich diese Näherung nach SCHOR, jedoch *ohne* die hier doch sehr wesentliche *Konstruktion* [3, 4][2]).

Wenn man die Strecke OB noch um 1/27000 vergrössert, so ist der verbleibende relative Fehler *kleiner als ein Milliardstel.* Zeichnerisch geht dies sehr einfach, da man OB nur dreimal durch 30 zu teilen und das Resultat hinzuzufügen hat.

In einer Gitterebene wird man etwa so vorgehen: Man wähle jetzt den Radius r des Kreises gleich 6 Gittereinheiten. $OM = 3r$ liege auf der x-Achse, $OC = r$ auf der y-Achse. Wie vorher sei $OA = {}^4/_3 r$ und $OB = OM + MA$. Nun seien E_x und E_y die Einheitspunkte des Gitters auf der x- und y-Achse, und auf der y-Achse sei $OF = 5r$. Zieht man jetzt $E_yX \parallel FB$, $XY \perp FE_x$, $YZ \perp XY$, wobei X auf der positiven x-Achse, Y auf der negativen y-Achse, Z auf der negativen x-Achse liegen sollen, so ist ZB sehr nahe gleich dem gesuchten Kreisumfang. Ausser dem Abzählen von Gitterpunkten braucht man also nur einen Kreisbogen, eine Parallele und zwei Lote.

Aus dem früheren Wert $x = 3{,}14147630030\ldots$ ergibt sich jetzt

$$x\,(1 + 30^{-3}) = 3{,}14159265127\ldots$$

anstelle von $\pi = 3{,}14159265359\ldots$, also eine Differenz von $0{,}0000000023\ldots$. Für den Erdumfang gerechnet, beträgt der Fehler knapp 3 cm.

Noch genauer, aber erheblich umständlicher ist eine Konstruktion von RAMANUJAN [5]; sie liefert ungefähr den halben relativen Fehler, nämlich eine Differenz von $0{,}0000000010\ldots$ gegenüber π. Man kann sich fragen, wie RAMANUJAN, der einige Näherungen für π systematisch hergeleitet hat, zu diesem Resultat gekommen ist. Er selbst bemerkt dazu: 'This value was obtained empirically, and it has no

[2]) Nach dem Referat im Jb. Fortschr. Math. *53* scheint auch die mir nicht zugängliche Note von SCHOR keine Konstruktion zu enthalten.

connection with the preceding theory.' Es ist wohl anzunehmen, dass er $\pi^4 = 97{,}409091034\ldots$ berechnet und gesehen hat, dass sich dies sehr nahe durch $97{,}409090909\ldots = 2143/22$ darstellen lässt. Weiter ergibt sich $2143 = 22 \cdot 9^2 + 19^2$ und damit der von RAMANUJAN angegebene und für seine Konstruktion benutzte Näherungswert $(9^2 + 19^2/22)^{1/4}$ für π. In anderer Form findet sich diese Näherung bei REICHENBÄCHER [6].

Eine von CORDILHA [7] angegebene Konstruktion benötigt in einer Gitterebene ebenfalls nur einen Kreisbogen, wenn man den Radius r des gegebenen Kreises gleich 4 Gittereinheiten wählt. Ist OM auf der x-Achse gleich $2^1/_2\, r$ und A der Punkt mit den Koordinaten $-{}^5/_4\, r$, ${}^1/_2\, r$, so liefert $OM + MA$ den Kreisumfang mit einem relativen Fehler von weniger als 1/5000000.

Auch eine von VIETA [8] benutzte Näherung lässt sich in dieser Weise erhalten, wenn man den Radius r gleich 5 Gittereinheiten wählt. Es wird jetzt $OM = 3^3/_5\, r$ gesetzt, und die Koordinaten von A sind ${}^6/_5\, r$, ${}^6/_5\, r$. $OM + MA$ ist dann der Kreisumfang mit einem relativen Fehler von weniger als 1/65000. Mit $OM = {}^9/_5\, r$ und $A = ({}^3/_5\, r, {}^3/_5\, r)$ ergibt sich hier auch der halbe Kreisumfang aus den Gitterpunkten mit einem Kreisbogen.

Da aber bei diesen Konstruktionen der Punkt A nicht auf der y-Achse liegt, ist die vorher angegebene doch bequemer und einfacher zu merken. P. FINSLER

LITERATURVERZEICHNIS

[1] TH. VAHLEN, *Konstruktionen und Approximationen* (B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1911), S. 310.
[2] P. FINSLER, *Einige elementargeometrische Näherungskonstruktionen*, Comment. math. helv. *10*, 250 (1938).
[3] V. G. CAVALLARO, G. Mat. Battaglini *72*, 86 (1934).
[4] C. SCHOR, Rassegna Mat. Fis. *5*, 63 (1927).
[5] S. RAMANUJAN, Quart. J. Math. *45* (1914); *Collected Papers of S. Ramanujan* (Cambridge 1927), S. 35f.
[6] E. REICHENBÄCHER, Hoffm. Z. *32*, 275 (1902) (nach VAHLEN, S. 211).
[7] J. CORDILHA, vgl. [2], S. 249.
[8] *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, III AB 9 (B. G. Teubner, Leipzig 1914–1931) S. 1117.

Einblick in den Aufbau und die Funktionsweise moderner Rechenautomaten[1])

Unter Rechenautomaten (RA) verstehen wir Rechengeräte, welche nicht nur einzelne Operationen, wie Addition zweier Zahlen und ähnliches, sondern längere Operationsketten selbsttätig abwickeln, nachdem die gegebenen Zahlen und das Rechenprogramm in das Gerät eingeführt worden sind und der Startknopf betätigt wird. Die Resultate werden entweder in Form von Zahltabellen oder von graphischen Darstellungen geliefert.

[1]) Der Artikel ist eine auf Wunsch der Redaktion entstandene Bearbeitung eines in die Materie einführenden Vortrages des Verfassers in der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft Winterthur.