Kleine Mitteilungen

Kleine Mitteilungen

Eine Verallgemeinerung der Fibonaccischen Zahlenfolge

In der Fibonaccischen Zahlenfolge ist jedes Glied gleich der Summe der beiden vorhergehenden; die Anfangsglieder sind 0 und 1. Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder konvergiert gegen das Teilverhältnis beim Goldenen Schnitt. Nachfolgend untersuchen wir eine Zahlenfolge, bei der jedes Glied die Summe der k vorhergehenden ist und die erforderlichen k Anfangsglieder nicht-negative reelle Zahlen sind.

Wir betrachten zunächst das Polynom

$$f(x) = x^k - x^{k-1} - \cdots - x - 1 \qquad (k > 1).$$

Seine Nullstellen seien x_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, k$. Nach der Descartesschen Zeichenregel[1]) hat $f(x)$ genau eine (einfache) positive Nullstelle; wir nennen sie x_1. Wegen $f(1) = 1 - k$ und $f(2) = 1$ ist $1 < x_1 < 2$. Aus $f(x_\nu) = 0$ folgt $f(|x_\nu|) \leqq 0$ und daraus für $\nu = 2, 3, \ldots, k$

$$|x_\nu| \leqq x_1; \tag{1}$$

andernfalls hätte $f(x)$ zwei positive Nullstellen.

$f(x)$ hat überhaupt nur einfache Nullstellen:

Wir bilden das Polynom $g(x) = (x-1)\, f(x) = x^{k+1} - 2\,x^k + 1$. Wäre $\xi \neq 1$ mehrfache Nullstelle von $f(x)$, so wäre $g'(\xi) = (k+1)\,\xi^k - 2\,k\,\xi^{k-1} = 0$, also $\xi = 0$ oder $\xi = 2\,k/(k+1)$, was unmöglich ist.

Aus $g(x_\mu) = g(x_\nu)$ folgt für $|x_\mu| = |x_\nu|$ die Gleichung $|x_\mu - 2| = |x_\nu - 2|$ und für $\mu \neq \nu$ daraus $x_\mu = \bar{x}_\nu$. Mit (1) können wir jetzt schliessen

$$|x_\nu| < x_1 \qquad \text{für } \nu = 2, 3, \ldots, k. \tag{2}$$

Nun wählen wir k Zahlen $a_n \geqq 0$, $n = 0, 1, \ldots, k-1$; es sei wenigstens ein $a_n > 0$. Aus dem linearen Gleichungssystem

$$a_n = \sum_{\nu=1}^{k} A_\nu\, x_\nu^n, \qquad n = 0, 1, \ldots, k-1,$$

lassen sich die k Grössen A_ν eindeutig bestimmen, denn die Determinante des Systems ist die Vandermondesche Determinante[1])

$$V_k = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \cdots & x_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{\mu > \nu} (x_\mu - x_\nu) \neq 0\,.$$

Es gilt $A_1 = \Delta / V_k$, wobei

$$\Delta = \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n\, a_n\, V_k^{(n)} \tag{3}$$

und $(-1)^n\, V_k^{(n)}$ der zum Element x_1^n gehörige Minor von V_k ist.

Indem wir in $V_k^{(n)}$ zur ersten Zeile alle übrigen addieren, erhalten wir mit $f(x_\nu) = 0$

---

[1]) Vergleiche zum Beispiel O. Perron, *Algebra* (Berlin 1951).

und $x_1 x_2 \cdots x_k = (-1)^{k-1}$ nach einigen Umformungen die Beziehung

$$V_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n+k-1}}{x_1} V_{k-1} - \frac{1}{x_1} V_k^{(n-1)}, \qquad 0 \leqq n < k;$$

dabei ist V_{k-1} die Vandermondesche Determinante für $x_2, x_3, \ldots, x_k$ und $V_k^{(-1)} = 0$.
Daraus folgt

$$V_k^{(n)} = (-1)^{n+k-1} V_{k-1} \sum_{\mu=1}^{n+1} \frac{1}{x_1^\mu}, \qquad 0 \leqq n < k.$$

Nach (3) ist somit

$$\Delta = (-1)^{k-1} V_{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} a_n \sum_{\mu=1}^{n+1} \frac{1}{x_1^\mu} \neq 0,$$

also

$$A_1 \neq 0. \tag{4}$$

Jetzt bilden wir die Zahlenfolge

$$a_n = \sum_{\nu=1}^{k} A_\nu x_\nu^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Dann gilt

$$a_{n+k} = \sum_{\nu=1}^{k} A_\nu x_\nu^{n+k} = \sum_{\nu=1}^{k} A_\nu \sum_{\mu=n}^{n+k-1} x_\nu^\mu = \sum_{\mu=n}^{n+k-1} \sum_{\nu=1}^{k} A_\nu x_\nu^\mu,$$

das heisst

$$a_{n+k} = \sum_{\mu=n}^{n+k-1} a_\mu.$$

Für den Quotienten

$$\sigma_m^{(r)} = \frac{a_{m+r}}{a_m} = \frac{\sum_{\nu=1}^{k} A_\nu x_\nu^{m+r}}{\sum_{\nu=1}^{k} A_\nu x_\nu^m} = \frac{A_1 x_1^r + \sum_{\nu=2}^{k} A_\nu x_\nu^r \left(\frac{x_\nu}{x_1}\right)^m}{A_1 + \sum_{\nu=2}^{k} A_\nu \left(\frac{x_\nu}{x_1}\right)^m}$$

ergibt sich wegen (2) und (4)

$$\lim_{m \to \infty} \sigma_m^{(r)} = x_1^r.$$

A. Schönhofer und K. Zuser, München

Aufgaben

Aufgabe 308. Es bedeute $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ das kleinste gemeinsame Vielfache der natürlichen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Man beweise, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\{1, 2, \ldots, n\}}$$

irrational ist.

P. Erdös

Lösung: Wir verwenden den Primzahlsatz in der Form $\{1, 2, \ldots, n\} = e^{n+o(n)}$[1].
Hieraus folgt

$$\{1, 2, \ldots, n\}^{-1} = e^{-n}(1 + o(n)).$$

[1]) Vergleiche E. Trost, *Primzahlen*, S. 56. Mit $o(n)$ wird eine Grösse bezeichnet, die für $n \to \infty$ nach Null strebt.