# Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **13 (1958)**

Heft 6

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Der vermutete Satz wurde bisher lediglich für $k \leqq 4$ bewiesen[2]). Seine Richtigkeit für $k = 5$ würde indessen die Gültigkeit des berühmten Vierfarbensatzes in sich schliessen. In der Tat: Wäre etwa $T$ ein in der Ebene schlicht liegender Komplex, dessen Strecken sich also nirgends überschneiden (bei der schlichten Einbettung eines Komplexes in eine Fläche sind die Strecken gegebenenfalls durch Kurvenbögen zu ersetzen), und würde für die chromatische Zahl von $T$ noch $k \geqq 5$ gelten, so liesse sich $T$ auf ein $S_k$ zusammenziehen. Da aber ein Zusammenzug die Einbettbarkeit in die Ebene nicht stört, müsste das Simplex $S_k$ in der Ebene schlicht realisierbar sein, was für $k \geqq 5$ ausgeschlossen ist. Also muss für ebene Komplexe $k \leqq 4$ sein, was mit dem zur Zeit noch unbewiesenen Vierfarbensatz gleichbedeutend ist.

Neuerdings wurden von DIRAC[3]) sehr eingehende Untersuchungen über das chromatische Problem angestellt und unter anderem gezeigt, dass die oben erörterte Vermutung sich in zahlreichen spezielleren Fällen als richtig erweist. Allgemein ist die Frage jedoch noch ungeklärt. H. HADWIGER

# Kleine Mitteilungen

## Referat über zwei Arbeiten von Árpád Szabó

1. *Wie ist die Mathematik zu einer deduktiven Wissenschaft geworden?*, Acta Antiqua Academiae Scientiarum Hungaricae *4*, 109–152 (1956).

2. *Δείκνυμι als mathematischer Terminus für «beweisen»*, Maia [NS] *10* (2), 1–26 (1958).

Die Arbeiten von ÁRPÁD SZABÓ aus Budapest auf dem Gebiete der Geschichte der voreuklidischen Geometrie und der vorsokratischen Philosophie sind in den Kreisen der Fachgelehrten wohlbekannt und geschätzt. Die zwei Studien, die wir zu besprechen vorhaben, sind durch ihren Gehalt und durch neue Aufschlüsse über die Entstehungsgeschichte der griechischen Mathematik von ganz besonderer Wichtigkeit.

Gleich am Anfang des ersten Aufsatzes: *Wie ist die Mathematik zu einer deduktiven Wissenschaft geworden?* legt uns der Verfasser in aller Deutlichkeit die drei Hauptthesen seiner Arbeit vor, die er zu beweisen beabsichtigt: 1. Die griechische Mathematik ist als deduktive Wissenschaft spätestens in der ersten Hälfte des 5. Jahrhunderts unter dem Einfluss der eleatischen Philosophie entstanden. 2. Die Eleaten waren es, die schon *vor* dieser entscheidenden Wandlung zum ersten Mal in der Geschichte des europäischen Denkens die grundlegenden Prinzipien der Logik klar formulierten. 3. Die deduktive Mathematik ist so lange überhaupt nicht möglich, als der Mathematiker die Begründung seiner Sätze nicht auf eine schon vorhandene und bewusst angewandte Logik bauen kann.

Unter Bezugnahme auf die Arbeiten von BECKER und VAN DER WAERDEN stellt der Verfasser fest, dass wir in den Büchern IX, 21–36, und X, Appendix 27, der *Elemente* EUKLIDS ein sehr altes *Mathema* der Pythagoreer vom Geraden und Ungeraden aus der ersten Hälfte des 5. Jahrhunderts vor Christus besitzen (BECKER) und dass in dem Buche VII, 1–36, derselben *Elemente* ein anderes pythagoreisches *Mathema*, welches gegen Ende des 5. Jahrhunderts vor Christus entstanden sein soll, enthalten ist (VAN DER WAERDEN).

Weiter zeigt der Verfasser, dass die Methode des indirekten Beweisverfahrens ganz

[2]) G. A. DIRAC, *A Property of 4-Chromatic Graphs and Some Remarks on Critical Graphs*, J. London math. Soc. *27*, 85–92 (1952). H. HADWIGER, *Über eine Klassifikation der Streckenkomplexe*, Vjschr. naturf. Ges. Zürich *88*, 133–142 (1943).

[3]) G. A. DIRAC, *Map Colour Theorems Related to the Heawood Colour Formula*, J. London math. Soc. *31*, 460–471 (1956). G. A. DIRAC, *A Theorem of R. L. Brooks and a Conjecture of H. Hadwiger*, Proc. London math. Soc. *7*, 161–195 (1957).

geläufig in diesem *Corpus* der archaisch-pythagoreischen Zahlenlehre angewendet wird und dass in einer grossen Zahl von in ihm enthaltenen Sätzen der direkte Beweis nicht ursprünglich ist und aus einer Überarbeitung eines älteren pythagoreischen indirekten Beweises entstanden ist, dessen ursprüngliche Form leicht wiederherzustellen ist.

Weiter zeigt der Verfasser, dass der indirekte Beweis der ursprünglichere im Verhältnis zum direkten Beweis ist. Der letztere ist oft schwer durchführbar und ist später an die Stelle des indirekten Beweises gestellt worden. Der indirekte Beweis verlangt vom Gelehrten, der ihn anwendet, die Vorkenntnis des logischen Prinzips vom ausgeschlossenen Dritten. Er ist bestrebt, zu zeigen, dass das kontradiktorische Gegenteil eines gegebenen Satzes, welcher zu beweisen ist, absurde Konsequenzen zeitigt.

Zum Schluss zeigt Szabó, dass alle Elemente der Logik, welche für die Entwicklung der deduktiven Mathematik notwendig sind, bei Parmenides und seinen Nachfolgern vorhanden waren. Dadurch kann der Verfasser mit aller Wahrscheinlichkeit behaupten, dass durch den Einfluss der eleatischen Lehre die Pythagoreer am Anfang des 5. Jahrhunderts vor unserer Zeitrechnung den entscheidenden Schritt getan und die Mathematik in eine deduktive Wissenschaft verwandelt haben, welche von einer kleinen Anzahl von evidenten Sätzen (Definitionen und Axiomen) ausgeht, um nacheinander weniger evidente und kompliziertere Sätze festzustellen und zu beweisen.

In der zweiten Arbeit: *Δείκνυμι als mathematischer Terminus für «beweisen»*, gibt der Verfasser eine sehr gelungene Darstellung der Methoden, welche die ersten Geometer von Hellas für die Entdeckung und das Beweisen der von ihnen aufgestellten Sätze anwendeten. Die gesamte alte Geometrie eines Thales und eines Pythagoras ist in Dunkel gehüllt. Ihre früheste Quelle sind die Auszüge aus Eudemos von Rhodos, einem Schüler des Aristoteles und Historiker der Mathematik (2. Hälfte des 4. Jahrhunderts vor unserer Zeitrechnung), welche uns Proklos bewahrt hat. Einige Bemerkungen Platons (1. Hälfte des 4. Jahrhunderts vor unserer Zeitrechnung) können auch angewendet werden. Aus den Trümmern der alten Geometrie hat der Verfasser glänzend ihre wahre Gestalt und ihre Beweismethoden wiederhergestellt und eine Darstellung ihrer Errungenschaften vorgeführt. Dies getan zu haben, ist das unbestreitbare Verdienst unseres Verfassers.

Schon in dem ersten von uns besprochenen Aufsatze (S. 128–134) hat der Verfasser wichtige Auseinandersetzungen geführt, welche in der zweiten Arbeit, zu der wir jetzt übergehen, weiterentwickelt werden.

Der Verfasser bemerkt gleich am Anfang, dass das Zeitwort *δείκνυμι* ein feststehender Terminus der griechischen Mathematik ist und dass es den Bedeutungswandel vom ganz konkreten «Zeigen» bis zum vollkommen abstrakten «Beweisen» durchgemacht hat. Ausdrücke wie *ὅπερ ἔδει δεῖξαι* (quod erat demonstrandum) und ähnliche werden allgemein in der griechischen Mathematik seit Euklid gebraucht. (Ältere Werke über Geometrie aus der altgriechischen Literatur sind uns nicht erhalten.) Der Ausdruck *δείκνυμι* in der archaischen Geometrie macht uns klar, dass es sich bei Thales beispielsweise um ein konkretes «Zeigen» anstatt eines abstrakten «Beweisens» handelt. Der Verfasser spricht über «ein sehr konkretes Sichtbarmachen».

Weiter behandelt er einen äusserst wichtigen Text des Jamblichos, *Vita Pythagorica* (89), seinerzeit von Tannery hervorgehoben, wo das Wort *ἱστορίη* vorkommt: *ἐκαλεῖτο δὲ ἡ γεωμετρία πρὸς Πυθαγόρου ἱστορία*. Auch das Wort *ἱστορίη* hat einen ganz konkreten Sinn: «empirisches Wissen». Auch hier ist die Geometrie ein auf die Anschauung begründeter Wissenszweig[1]).

Auf Seite 4ff. folgt ein sehr interessantes Beispiel der Methode des *δεικνύναι* in Platons Dialog (*Menon*, 82b–85c) und weiter auf Seite 8f. im Beweise des allgemeinen pythagoreischen Lehrsatzes bei Euklid (*Elemente* I, 47).

Auf Seite 9ff. wird gezeigt, dass die Methode des Aufeinanderpassens (*ἐφαρμόζειν*) bei Thales eine grosse Rolle spielt und «dass von den fünf Sätzen, die dem Thales in der antiken Überlieferung zugeschrieben werden, vier sich direkt und der fünfte indirekt mit

---

[1]) Im Fragment 129 des Heraklit (Diels-Kranz) wird dem Pythagoras seine *ἱστορίη* vorgeworfen, welche durch die pejorativen Ausdrücke *πολυμαθίη* und *κακοτεχνίη* näher bestimmt wird. Die zwei Texte aus Jamblichos (*V. P.* 89) und Heraklit (Fragment 129) beweisen gegenseitig ihre Echtheit als Information über Pythagoras.

der Deckungsmethode beweisen lassen» (Seite 11). Wir möchten nur betonen, dass wir uns die archaische Geometrie nicht als eine Art experimentelle Wissenschaft vorstellen dürfen. Wir glauben, dass THALES seine Sätze irgendwie bewiesen hat und dass sein *δεικνύναι* ein *δεικνύναι μετὰ λόγου* war[2]).

Im folgenden Abschnitt (Seiten 11–17) hat der Verfasser die sehr interessante Beobachtung gemacht, dass die von BECKER bei EUKLID (*Elemente* IX, 21–36) entdeckte altpythagoreische Lehre vom Geraden und Ungeraden nur im Sinne des Rechnens mit Steinchen (*ψηφορία*) ihren wahren Gehalt bewahrt. EUKLID oder sein Vorgänger hat die ganze Lehre mit ihrem Beweisverfahren im Sinne der als Strecken aufgefassten Zahlen umgeändert und dadurch die alte Beweismethode mit ihrem konkreten *δεικνύναι* entstellt.

Im letzten Teil seines Aufsatzes (Seiten 17–26) beantwortet der Verfasser die Frage: Warum und unter welchen Einflüssen wurde durch die Pythagoreer des 5. Jahrhunderts das konkrete «Zeigen» der älteren Mathematik durch ein abstraktes «Beweisen» ersetzt?

THALES ist hauptsächlich als Geometer bekannt. Die Pythagoreer befassten sich ganz besonders mit der Zahlenlehre, obwohl sie sicherlich auch Geometrie betrieben. Noch ARCHYTAS im 4. Jahrhundert vor Christus, der ältere Zeitgenosse PLATONS, betont die bevorzugte Stellung der «Logistik» (Arithmetik) gegenüber der Geometrie (Fragment 4 von DIELS-KRANZ).

Unter welchem Einfluss ging die griechische Mathematik von der anschaulichen zur logischen Methode des Beweisens über? Der indirekte Beweis (*reductio ad absurdum*) spielte hierbei eine bedeutende Rolle. Der Verfasser antwortet, dass der Übergang durch die Pythagoreer spätestens in der ersten Hälfte des 5. Jahrhunderts unter dem Einfluss der Lehre von PARMENIDES aus Elea vollzogen wurde. Diese Behauptung, welche der Verfasser auch in früheren Arbeiten aufgestellt und bewiesen hat[3]), wird diesmal von einer anderen Seite nachgeprüft und festgelegt. PARMENIDES behauptet, dass es drei «Wege der Forschung» gibt: 1. Das Seiende ist. 2. Das Seiende ist nicht. 3. Das Seiende ist und ist auch nicht. Der Eleate beweist nicht, dass das Seiende (*τὸ ὄν*) ist. Er beweist, dass die zwei folgenden Thesen (2. und 3.) den Gedanken in Selbstwiderspruch verwickeln: «das Seiende ist nicht» und «das Seiende ist und ist auch nicht». «PARMENIDES und die Eleaten waren es, die klar und bewusst und eindeutig als einziges Kriterium der Wahrheit die *Widerspruchsfreiheit* bezeichneten» (Seite 23). Hier wird zum ersten Mal in der Geschichte der griechischen Philosophie das indirekte Beweisverfahren klar aufgestellt und bewusst angewendet. Dasselbe Verfahren haben auch die Pythagoreer des 5. Jahrhunderts gebraucht und in ihre Demonstration der arithmetischen Sätze einbezogen. «Ebenso verläuft die indirekte Beweisführung auch bei EUKLID» (Seite 24). «Die ersten griechischen Mathematiker übernahmen nicht nur die Logik, sondern auch diese feindliche Einstellung gegen jede sinnliche Wahrnehmung von den Eleaten» (Seite 25). Da man sich der Zahlen leichter als rein gedanklicher Elemente bedienen konnte, wurde der Arithmetik ein Vorrang gegenüber der Geometrie zuerkannt, obwohl man dabei die Zahlen als Strecken veranschaulichte. Bei EUKLID hat deshalb *δείκνυμι* einen doppeldeutigen Sinn: Das Verbum ist der Terminus für die rein logische Beweisführung, aber es schimmert auch der alte Sinn des *Sichtbarmachens* durch.

Die Aufsätze von SZABÓ sind nicht nur wegen ihrer Resultate wichtig, sondern auch durch die neuen Probleme, die sie aufstellen. Wir möchten nicht solche Fragestellungen, die sich aus seinen Studien ergeben, im vorhinein beantworten. Nur eine davon möchten wir hervorheben: Wann und warum wurden in der Darstellung der Zahlen mit Hilfe der Steinchen die letzteren durch Strecken ersetzt? Wir glauben, dass es die Entdeckung der irrationalen Grössen war, welche diesen Wechsel verursachte. Ferner, wann tauchen die irrationalen Grössen zum ersten Mal in der griechischen Mathematik auf? Die Antwort auf diese Frage verlangt aber eine eigene Untersuchung. Wir nehmen die Arbeiten von SZABÓ dankbar entgegen für das, was er uns schon gegeben hat, und für das, was er uns noch zu geben verspricht.

A. FRENKIAN, Bukarest

---

[2]) Wir möchten noch hinzufügen, dass in dem Satz *ὅπερ ἔδει δεῖξαι* das Wörtchen *ἔδει* besonders wichtig ist und betont werden muss. Es bringt zum Ausdruck «*ein Zeigen, das zwingend ist*».

[3]) Siehe Á. SZABÓ, *Eleatica*, Acta ant. Acad. sci. hung. *3*, 67–103 (1955).