

# Ein Partitionsproblem und seine funktionentheoretische Lösung

Autor(en): **Jeger, M.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **13 (1958)**

Heft 5

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-19778>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts  
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds  
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

---

El. Math.      Band XIII      Nr. 5      Seiten 97–120      Basel, 10. September 1958

---

## Ein Partitionsproblem und seine funktionentheoretische Lösung

Eine Klasse von kombinatorischen Problemstellungen lässt sich darauf zurückführen, gewisse Figuren aufzuzählen, die zu einer vorgegebenen natürlichen Zahl  $n$  gehören. Man spricht dann dementsprechend auch etwa vom Aufzählen bestimmter Figuren vom Index  $n^1$ ).

Ist allgemein  $K_n$  die Anzahl der betrachteten Figuren vom Index  $n$ , so wird

$$\sum_{n=0}^{\infty} K_n \zeta^n$$

als die sogenannte *abzählende Potenzreihe* dieser kombinatorischen Aufgabe bezeichnet. Die Verwendung abzählender Potenzreihen zur Bestimmung von  $K_n$  geht auf EULER zurück; in seiner *Introductio in analysin infinitorum* vom Jahre 1748<sup>2)</sup> behandelt er einige Partitionsprobleme auf diese Weise. In neuerer Zeit ist diese Methode verschiedentlich ausgebaut worden, wobei aber im Gegensatz zu EULER das Schwergewicht auf die durch die abzählende Potenzreihe dargestellte Funktion und deren Verhalten verlegt worden ist. In diesem Zusammenhang müssen besonders die beiden englischen Mathematiker CAYLEY und SYLVESTER genannt werden. Die im folgenden dargelegte Lösung des sogenannten *Geldwechselproblems* ist ein weiterer Beitrag dieser Art.

G. POLYA und G. SZEGÖ stellen ihrer Sammlung *Aufgaben und Lehrsätze der Analysis*<sup>3)</sup> das folgende, auch unter dem Namen Geldwechselproblem bekannte Partitionsproblem an die Spitze:

*Auf wieviele Arten lässt sich ein Franken in Kleingeld wechseln? Als Kleingeld kommen (in der Schweiz) in Betracht: 1-Rappen-, 2-Rappen-, 5-Rappen-, 10-Rappen-, 20-Rappen- und 50-Rappen-Stücke<sup>4)</sup>.*

Es ist hier gefragt nach der Anzahl der Partitionen der Zahl 100 in Summanden der Grösse 1, 2, 5, 10, 20 und 50. Die gesuchte Anzahl ist identisch mit der Anzahl

---

<sup>1)</sup> Beispielsweise lassen sich etwa die Permutationen von 3 Elementen (das heisst vom Index 3) darstellen durch die 6 Figuren

$$ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.$$

<sup>2)</sup> Vgl. [1] des Literaturverzeichnisses am Schlusse des Artikels.

<sup>3)</sup> Vgl. [2], Aufgabe 1.

<sup>4)</sup> Zum Geldwechselproblem siehe auch bei AHRENS [6] und VON SCHAEWEN [7].

der Lösungen der diophantischen Gleichung

$$\mu_1 + 2 \mu_2 + 5 \mu_3 + 10 \mu_4 + 20 \mu_5 + 50 \mu_6 = 100$$

in nichtnegativen ganzen Zahlen  $\mu_k$ .

Die Lösung der beiden Autoren wird in der darauffolgenden Aufgabe entwickelt. Sie betrachten die diophantische Gleichung

$$\mu_1 + 2 \mu_2 + 5 \mu_3 + 10 \mu_4 + 20 \mu_5 + 50 \mu_6 = n \quad (1)$$

und bezeichnen die Anzahl ihrer Auflösungen in nichtnegativen ganzen Zahlen  $\mu_k$  mit  $A_n$ . Sie führen dann die abzählende Potenzreihe des vorliegenden kombinatorischen Problems

$$A_0 + A_1 \zeta + A_2 \zeta^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \zeta^n$$

mit der Veränderlichen  $\zeta$  ein. Wie man leicht feststellt, ist

$$\left. \begin{aligned} F(\zeta) &= \frac{1}{(1-\zeta)(1-\zeta^2)(1-\zeta^5)(1-\zeta^{10})(1-\zeta^{20})(1-\zeta^{50})} \\ &= \left( \sum_{\mu_1=0}^{\infty} \zeta^{\mu_1} \right) \left( \sum_{\mu_2=0}^{\infty} \zeta^{2\mu_2} \right) \dots \left( \sum_{\mu_6=0}^{\infty} \zeta^{50\mu_6} \right) \\ &= \sum_{\mu_1=0}^{\infty} \sum_{\mu_2=0}^{\infty} \sum_{\mu_3=0}^{\infty} \sum_{\mu_4=0}^{\infty} \sum_{\mu_5=0}^{\infty} \sum_{\mu_6=0}^{\infty} \zeta^{\mu_1 + 2\mu_2 + 5\mu_3 + 10\mu_4 + 20\mu_5 + 50\mu_6} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \zeta^n. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Unsere abzählende Potenzreihe ist die Taylor-Entwicklung der Funktion  $F(\zeta)$  im Punkte  $\zeta = 0$ . Aus der Gestalt des Nenners ergibt sich, dass die rationale Funktion  $F(\zeta)$  ihre sämtlichen Pole auf dem Einheitskreis der komplexen Zahlenebene hat. Die vorliegende abzählende Potenzreihe konvergiert daher überall innerhalb des Einheitskreises und stellt dort die rationale Funktion  $F(\zeta)$  dar.

Für die Lösung der ursprünglich gestellten Geldwechselfrage handelt es sich nun darum, den Koeffizienten  $A_{100}$  zu bestimmen. G. POLYA und G. SZEGÖ schlagen vor, für die numerische Rechnung die nötigen Glieder in den Entwicklungen

$$\frac{1}{(1-\zeta^{50})}; \quad \frac{1}{(1-\zeta^{50})(1-\zeta^{20})}; \quad \frac{1}{(1-\zeta^{50})(1-\zeta^{20})(1-\zeta^{10})} \dots \quad \text{usw.}$$

sukzessive tabellarisch zusammenzustellen<sup>5)</sup>. Eine Formel für  $A_n$  scheint nicht bekannt zu sein.

Das im folgenden beschriebene Lösungsverfahren stützt sich auf die Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen und führt zu einer eigenartigen Verflechtung zwischen Kombinatorik und Analysis. Es liefert gleichzeitig ein weiteres Beispiel für die Kraft, die der *Methode der abzählenden Potenzreihen* innewohnt.

<sup>5)</sup> Vgl. [2], S. 152.

### Beschreibung der Lösung

Wir bestimmen zunächst die Anzahl der Partitionen vom Index  $n$  mit Summanden der Grösse 1, 2 und 5; ihre Anzahl sei mit  $B_n$  bezeichnet. Es entspricht dies einer Vereinfachung der Geldwechselfrage, indem als Kleingeld nur 1-Rappen-, 2-Rappen- und 5-Rappen-Stücke zugelassen werden. Für die aus diesem kombinatorischen Problem hervorgehende abzählende Potenzreihe gilt

$$f(\zeta) = \frac{1}{(1-\zeta)(1-\zeta^2)(1-\zeta^5)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \zeta^n. \quad (3)$$

Die Relation (3) besteht wiederum für jedes  $|\zeta| < 1$ .

Für die Partitionszahlen  $B_n$  wird mit Hilfe funktionentheoretischer Methoden eine Formel hergeleitet, so dass sich diese dann mühelos berechnen lassen.

Nun gilt für  $|\zeta| < 1$

$$\left. \begin{aligned} F(\zeta) &= f(\zeta) \cdot f(\zeta^{10}) = \left( \sum_{j=0}^{\infty} B_j \zeta^j \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} B_k \zeta^{10k} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} B_j B_k \zeta^{j+10k} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \zeta^n. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Hieraus folgt durch Koeffizientenvergleich schliesslich

$$A_n = \sum_{j+10k=n} B_j B_k = \sum_{k=0}^{\lfloor n/10 \rfloor} B_k B_{n-10k} \quad (5)$$

so dass sich dann auch  $A_n$  berechnen lässt.

### Berechnung der Partitionszahlen $B_n$

Die rationale Funktion  $f(\zeta)$  besitzt 6 Pole auf dem Einheitskreis, und zwar einen Pol 3. Ordnung in  $\zeta_1 = +1$  und je einen Pol 1. Ordnung in  $\zeta_2 = -1$ ,  $\zeta_3 = \sigma$ ,  $\zeta_4 = \sigma^2$ ,  $\zeta_5 = \sigma^3$  und  $\zeta_6 = \sigma^4$ , wenn  $\sigma$  die 5. Einheitswurzel bedeutet (Fig. 1).

Auf Grund der Integralformel von CAUCHY gilt nun

$$B_n = \frac{1}{n!} f_{(0)}^{(n)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta. \quad (6)$$

$c$  ist ein geschlossener doppelkonturfreier und positiv-orientierter Weg um den Nullpunkt herum, der keinen Pol von  $f(\zeta)$  einschliesst, der also etwa ganz im Innern des Einheitskreises verläuft.  $c'$  sei ein analoger, jedoch negativ-orientierter Weg, der den Einheitskreis umschliesst. Daneben betrachten wir jetzt noch den Weg  $c^*$ , der sich aus den Bogen  $c$  und  $c'$  und dem in beiden Richtungen durchlaufenen Stück  $PP'$  zusammensetzt (Figur 2). Bezeichnen wir das Residuum der Funktion

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} = \frac{1}{\zeta^{n+1}(1-\zeta)(1-\zeta^2)(1-\zeta^5)} = \varphi_n(\zeta)$$

<sup>6)</sup>  $[x]$  bedeutet die grösste ganze Zahl, die  $x$  nicht übertrifft.



im Pol an der Stelle  $\zeta = \zeta_k$  mit  $R_n(\zeta_k)$ , so gilt nach dem Residuensatze

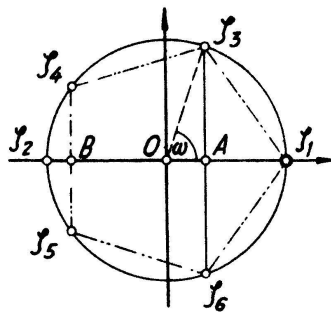
$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{c^*} \varphi_n(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \varphi_n(\zeta) d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{c'} \varphi_n(\zeta) d\zeta = -\sum_{k=1}^6 R_n(\zeta_k).$$

Das negative Vorzeichen auf der rechten Seite rührt daher, dass das vom Weg  $c^*$  umschlossene Gebiet rechts von  $c^*$  liegt.

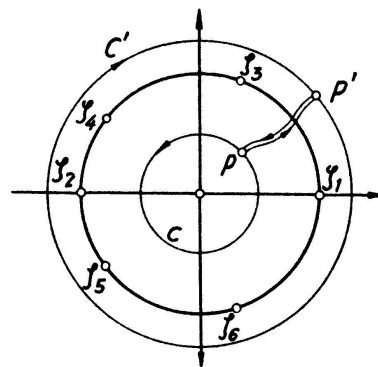
Wie man leicht bestätigt, verschwindet das Integral längs  $c'$ , so dass also

$$B_n = -\sum_{k=1}^6 R_n(\zeta_k). \quad (7)$$

Die Partitionszahl  $B_n$  ist damit auf die Berechnung der 6 Residuen der Funktion



Figur 1



Figur 2

$\varphi_n(\zeta)$  auf dem Einheitskreis zurückgeführt. Gegenüber dem in (6) auftretenden einzigen Residuum im Nullpunkt hat dies den Vorteil, dass die Ordnung der Pole jetzt nicht mehr von  $n$  abhängt.

Zur Berechnung der 6 Residuen in (7) stützen wir uns auf zwei Formeln, die kurz hergeleitet werden sollen.

Es seien  $\alpha(\zeta)$  und  $\beta(\zeta)$  zwei in der Umgebung von  $\zeta_0$  reguläre analytische Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:  $\beta(\zeta)$  habe in  $\zeta = \zeta_0$  eine  $k$ -fache Nullstelle und es sei  $\alpha(\zeta_0) \neq 0$ .

Dann ist

$$h(\zeta) = \frac{\alpha(\zeta)}{\beta(\zeta)}$$

eine in der Umgebung von  $\zeta_0$  ebenfalls reguläre analytische Funktion, die in  $\zeta = \zeta_0$  einen Pol  $k$ -ter Ordnung aufweist. Wir können dann schreiben

$$h(\zeta) = \frac{\alpha(\zeta)}{(\zeta - \zeta_0)^k \gamma(\zeta)} \quad \text{mit} \quad \gamma(\zeta_0) \neq 0.$$

Für das Residuum von  $h(\zeta)$  an der Stelle  $\zeta_0$  ergibt sich unter Benutzung der Integralformel von CAUCHY mit einem geeigneten Integrationsweg um  $\zeta_0$  herum

$$R = \frac{1}{2\pi i} \oint h(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\alpha(\zeta)}{(\zeta - \zeta_0)^k \gamma(\zeta)} d\zeta = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{d^{(k-1)}}{d\zeta^{k-1}} \left\{ \frac{\alpha(\zeta)}{\gamma(\zeta)} \right\} \Big|_{\zeta=\zeta_0}. \quad (8a)$$

Liegt speziell ein Pol 1. Ordnung vor, so gilt weiter

$$R = \frac{\alpha(\zeta)}{\gamma(\zeta)} \Big|_{\zeta=\zeta_0} = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \frac{\alpha(\zeta)}{\frac{\beta(\zeta)}{\zeta - \zeta_0}} = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \frac{\alpha(\zeta)}{\frac{\beta(\zeta) - \beta(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0}}.$$

Diese Umformung ist zulässig, denn nach Voraussetzung ist  $\beta(\zeta_0) = 0$ . In einem Pol 1. Ordnung hat man daher die weitere Beziehung

$$R = \frac{\alpha(\zeta)}{\beta'(\zeta)} \Big|_{\zeta=\zeta_0}, \quad (8b)$$

die für unsere Zwecke günstiger ist als die Formel (8a).

Auf Grund von (8a) und (8b) ergeben sich für die 6 Residuen folgende Rechnungen:

a) *Pol 3. Ordnung in  $\zeta_1 = +1$*

Es ist

$$\varphi_n(\zeta) = \frac{1}{\zeta^{n+1} (1 - \zeta) (1 - \zeta^2) (1 - \zeta^5)} = - \frac{1}{\zeta^{n+1} (\zeta - 1)^3 (1 + \zeta) (1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4)}.$$

Mit

$$\alpha(\zeta) = -1 \quad \text{und} \quad \gamma(\zeta) = \zeta^{n+1} (1 + \zeta) (1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4)$$

erhält man gemäss (8a)

$$R_n(\zeta_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma \gamma'' - 2 \gamma'^2}{\gamma^3} \Big|_{\zeta=\zeta_1}.$$

Daraus entnimmt man nach einigen einfachen Rechnungen schliesslich den Wert

$$R_n(\zeta_1) = - \frac{2n^2 + 16n + 27}{40}. \quad (9)$$

b) *Pol 1. Ordnung in  $\zeta_2 = -1$*

Um die Differentiation möglichst zu vereinfachen, setzen wir

$$\varphi_n(\zeta) = \frac{\alpha(\zeta)}{\beta(\zeta)} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \alpha(\zeta) = \frac{1}{\zeta^{n+1} (1 - \zeta)^2 (1 - \zeta^5)}, \\ \gamma(\zeta) = 1 + \zeta. \end{cases}$$

Dann folgt aus (8b)

$$R_n(\zeta_2) = \frac{1}{\zeta^{n+1} (1 - \zeta)^2 (1 - \zeta^5)} \Big|_{\zeta=-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{8}. \quad (10)$$

---

<sup>7)</sup> Vgl. etwa [8], S. 177.

c) Pole 1. Ordnung in  $\zeta_3 = \sigma$ ,  $\zeta_4 = \sigma^2$ ,  $\zeta_5 = \sigma^3$ ,  $\zeta_6 = \sigma^4$

Hier wird die in (8b) vorkommende Differentiation besonders einfach, wenn wir

$$\varphi_n(\zeta) = \frac{\alpha(\zeta)}{\beta(\zeta)} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \alpha(\zeta) = \frac{1}{\zeta^{n+1} (1-\zeta) (1-\zeta^2)}, \\ \beta(\zeta) = 1 - \zeta^5 \end{cases}$$

setzen. Da der polderzeugende Faktor im Nenner von  $\varphi_n(\zeta)$  für sämtliche 4 genannten Pole im Glied  $(1 - \zeta^5)$  steckt, hat dieser Ansatz zudem den Vorteil, dass wir für die 4 Residuen denselben algebraischen Ausdruck erhalten. Nach Formel (8b) ist

$$\begin{aligned} R_n(\zeta_3) &= - \frac{1}{5 \zeta^{n+5} (1-\zeta) (1-\zeta^2)} \Big|_{\zeta=\sigma}, \\ R_n(\zeta_4) &= - \frac{1}{5 \zeta^{n+5} (1-\zeta) (1-\zeta^2)} \Big|_{\zeta=\sigma^2}, \\ R_n(\zeta_5) &= - \frac{1}{5 \zeta^{n+5} (1-\zeta) (1-\zeta^2)} \Big|_{\zeta=\sigma^3=1/\sigma^2} = - \frac{\zeta^{n+8}}{5 (\zeta-1) (\zeta^2-1)} \Big|_{\zeta=\sigma^2}, \\ R_n(\zeta_6) &= - \frac{1}{5 \zeta^{n+5} (1-\zeta) (1-\zeta^2)} \Big|_{\zeta=\sigma^4=1/\sigma} = - \frac{\zeta^{n+8}}{5 (\zeta-1) (\zeta^2-1)} \Big|_{\zeta=\sigma}. \end{aligned}$$

Die beiden letzten Beziehungen wurden noch umgeformt durch die Substitution  $\zeta \rightarrow 1/\zeta$ .

Da  $\sigma$  und  $1/\sigma$  sowie auch  $\sigma^2$  und  $1/\sigma^2$  konjugiert-komplex sind, sind auch die zugehörigen Residuen konjugiert-komplex. Dieser Sachverhalt legt eine paarweise Zusammenfassung derselben nahe. So findet man etwa

$$\begin{aligned} R_n(\zeta_3) + R_n(\zeta_6) &= - \frac{1}{5} \left\{ \frac{1}{\sigma^{n+5} (1-\sigma) (1-\sigma^2)} + \frac{\sigma^{n+8}}{(\sigma-1) (\sigma^2-1)} \right\} \\ &= - \frac{1}{5} \cdot \frac{1 + \sigma^{2n+13}}{\sigma^{n+5} (1-\sigma) (1-\sigma^2)} = - \frac{1}{5} \cdot \frac{1 + \sigma^{2n+3}}{\sigma^n (1-\sigma) (1-\sigma^2)}. \end{aligned}$$

Beim letzten Schritt ist noch berücksichtigt worden, dass  $\sigma^5 = 1$  ist. Für die auf der rechten Seite stehende Funktion von  $\sigma$  führen wir nun zur Abkürzung ein eigenes Symbol ein und setzen

$$- \frac{1}{5} \cdot \frac{1 + \sigma^{2n+3}}{\sigma^n (1-\sigma) (1-\sigma^2)} = S(\sigma).$$

Dieser Ausdruck wird mit dem konjugiert-komplexen Wert seines Nenners erweitert, damit Zähler und Nenner reell werden. Mit der Substitution

$$\sigma = e^{i\omega}, \quad \text{wobei} \quad \omega = \frac{2\pi}{5},$$

folgt nach einigen leichten Umformungen

$$\begin{aligned} S(\sigma) &= - \frac{1}{5} \cdot \frac{\bar{\sigma}^n (1 + \sigma^{2n+3}) (1-\bar{\sigma}) (1-\bar{\sigma}^2)}{(1-\sigma) (1-\bar{\sigma}) (1-\sigma^2) (1-\bar{\sigma}^2)} \\ &= - \frac{1}{10} \cdot \frac{\cos n\omega - \cos(n+1)\omega - \cos(n+2)\omega + \cos(n+3)\omega}{(1-\cos\omega) (1-\cos 2\omega)}, \end{aligned}$$

und wir erhalten schliesslich

$$R_n(\zeta_3) + R_n(\zeta_6) = S(\sigma) = -\frac{\cos n \omega - \cos(n+1) \omega - \cos(n+2) \omega + \cos(n+3) \omega}{10(1 - \cos \omega)(1 - \cos 2 \omega)},$$

$$R_n(\zeta_4) + R_n(\zeta_5) = S(\sigma^2) = -\frac{\cos 2 n \omega - \cos 2(n+1) \omega - \cos 2(n+2) \omega + \cos 2(n+3) \omega}{10(1 - \cos 2 \omega)(1 - \cos 4 \omega)}$$

mit

$$\omega = \frac{2 \pi}{5}.$$

$S(\sigma)$  und  $S(\sigma^2)$  lassen sich nun ohne weiteres berechnen, wenn man beachtet, dass

$$\cos k \omega = \begin{cases} 1 & \text{für } k \equiv 0 \pmod{5}, \\ \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) & \text{für } k \equiv \pm 1 \pmod{5}, \\ -\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) & \text{für } k \equiv \pm 2 \pmod{5}. \end{cases}$$

Die Werte sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

$n$	$S(\sigma)$	$S(\sigma^2)$	$S(\sigma) + S(\sigma^2)$
$n \equiv 0 \pmod{5}$	$-\frac{1}{50}(5 - \sqrt{5})$	$-\frac{1}{50}(5 + \sqrt{5})$	$-\frac{1}{5}$
$n \equiv 1 \pmod{5}$	$-\frac{2}{25}\sqrt{5}$	$+\frac{2}{25}\sqrt{5}$	0
$n \equiv 2 \pmod{5}$	$-\frac{1}{50}(5 - \sqrt{5})$	$-\frac{1}{50}(5 + \sqrt{5})$	$-\frac{1}{5}$
$n \equiv 3 \pmod{5}$	$\frac{1}{50}(5 + \sqrt{5})$	$\frac{1}{50}(5 - \sqrt{5})$	$+\frac{1}{5}$
$n \equiv 4 \pmod{5}$	$\frac{1}{50}(5 + \sqrt{5})$	$\frac{1}{50}(5 - \sqrt{5})$	$+\frac{1}{5}$

(11)

Aus den Beziehungen (9), (10) und (11) erhält man jetzt die folgende Formel für die Partitionszahlen  $B_n$

$$B_n = \frac{2n^2 + 16n + 27 + 5(-1)^n + 8\Omega(n)}{40},$$

wobei  $\Omega(n) = \begin{cases} +1 \\ 0 \\ +1 \\ -1 \\ -1 \end{cases}$ , je nachdem  $\begin{cases} n \equiv 0 \\ n \equiv 1 \\ n \equiv 2 \\ n \equiv 3 \\ n \equiv 4 \end{cases} \pmod{5}$ .

(12)

SYLVESTER bezeichnet  $B_n$  in seinen Untersuchungen als den Denumeranten von  $n$  zu den Summanden 1, 2 und 5. Nach seiner Theorie der Denumeranten<sup>9)</sup> ist zu erwarten

<sup>8)</sup>  $\cos \omega = \overline{OA}$ ,  $\cos 2 \omega = \overline{OB}$  in Figur 1:

<sup>9)</sup> Vgl. [5]. Eine ausführliche Darstellung von SYLVESTERS Denumerantentheorie befindet sich in [3], S. 140-158.

ten, dass  $B_n$  je ein Glied mit der Periode 2 und der Periode 5 enthalten muss;  $(-1)^n$  hat die Periode 2,  $\Omega(n)$  die Periode 5. SYLVESTER hat für diese periodischen Anteile den Begriff *Wellenfunktion* geprägt.

Nach (5) ist nun etwa

$$A_{100} = \sum_{k=0}^{10} B_k B_{100-10k}.$$

Berechnet man die hierin vorkommenden  $B_k$  auf Grund von (12), so findet man

$$\begin{aligned} A_{100} &= 1 \cdot 541 + 1 \cdot 442 + 2 \cdot 353 + 2 \cdot 274 + 3 \cdot 205 + 4 \cdot 146 \\ &\quad + 5 \cdot 97 + 6 \cdot 58 + 7 \cdot 29 + 8 \cdot 10 + 10 \cdot 1 = 4562 \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit dem in (2) angegebenen Wert.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] L. EULER, *Introductio in analysin infinitorum*, Opera omnia, series I, volumen VIII (Leipzig-Berlin 1922), speziell Kap. 16, *De partitione numerorum*, S. 313–338.
- [2] G. POLYA und G. SZEGÖ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Band I (Berlin 1925).
- [3] E. NETTO, *Lehrbuch der Kombinatorik*, 2. Aufl. (Leipzig-Berlin 1927).
- [4] P. A. MAC MAHON, *Combinatory Analysis*, Proc. Lond. Math. Soc. 28, 5–12 (1897).
- [5] J. J. SYLVESTER, *The Partitions of Numbers*, Proc. Lond. Math. Soc. 28, 33–96 (1897).
- [6] W. AHRENS: *Altes und Neues aus der Unterhaltungsmathematik* (Berlin 1918), S. 34–40.
- [7] P. VON SCHAEWEN, *Bericht über ein Preisausschreiben*, Z. math. naturw. Unterricht 42, 192–195 (1911).
- [8] L. BIEBERBACH, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, Bd. 1, 4. Aufl. (Leipzig 1934), S. 177.
- [9] G. POLYA, *Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen*, Acta math. 68, 145–253 (1937).

M. JEGER, Luzern

## Ungelöste Probleme

**Nr. 25.** Eine euklidische Punktmenge  $A$  weist die Dreipunktconvexitätseigenschaft auf, wenn  $A$  mit drei Punkten  $P, Q, R \in A$  stets wenigstens eine der drei Verbindungsstrecken  $QR, RP, PQ$  ganz enthält. Diese schwächere Variante zu der üblichen Konvexitätsbedingung wurde von F. A. VALENTINE<sup>1)</sup> eingehend untersucht. Es ist naheliegend, eine erschöpfende direkte Charakterisierung derjenigen Punktmenge zu suchen, welche die erwähnte Dreipunktforderung erfüllen. Diese Aufgabe – übrigens eine typische Fragestellung kombinatorisch-geometrischer Art – ist aber anscheinend nicht leicht zu lösen. Lediglich für ebene Punktmenge kann eine Antwort gegeben werden.

F. A. VALENTINE bewies die folgende Aussage: *Eine abgeschlossene Punktmenge  $A$  der euklidischen Ebene mit der Dreipunktconvexitätseigenschaft lässt sich als Vereini-*

<sup>1)</sup> F. A. VALENTINE, *A Three Point Convexity Property*, Pacific J. Math. 7, 1227–1235 (1957).