Ungelöste Probleme

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **13 (1958)**

Heft 1

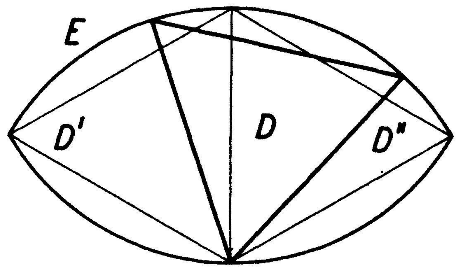
PDF erstellt am: **20.09.2024**

[9] MÜLLER, E., *Vorlesungen über darstellende Geometrie*. Band I: *Die linearen Abbildungen* (speziell 3. Kapitel) (Wien 1923).
[10] STIEFEL, E., *Lehrbuch der darstellenden Geometrie* (Birkhäuser, Basel 1947).
[11] WUNDERLICH, W., *Zur Entbehrlichkeit des Satzes von Pohlke im Unterricht der darstellenden Geometrie*, El. Math. *10*, Heft 4 (1955).

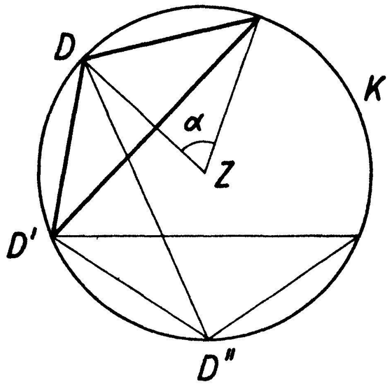
Ungelöste Probleme

Nr. 21. In der Ebene sei ein Dreieck D vorgelegt. Wir fragen, ob sich diesem D eine von seinem Umkreis K verschiedene Eilinie E so umschreiben lässt, dass D in E derart stetig herumgeführt werden kann, dass D nach einer vollen Umdrehung in der Ebene wieder mit sich zur Deckung kommt und hierbei dauernd der festen Eilinie E einbeschrieben bleibt.

1. Erstens sei angemerkt, dass das reguläre Dreieck die oben geschilderte Eigenschaft tatsächlich aufweist[1]). Sind nämlich D' und D'' zwei verschiedene, mit dem regulären Dreieck D kongruente Dreiecke, die eine Seite gemeinsam haben, und ist E das dem durch D' und D'' gebildeten Rhombus umschriebene Kreisbogenzweieck (vgl. Figur 1), so lässt sich D, das der Eilinie E einbeschrieben vorausgesetzt werden



Figur 1



Figur 2

darf, in der Tat in der vorgeschriebenen Weise in E herumführen; die beiden Scheitel der Kreisbogen von E spielen bei diesem Drehvorgang abwechselnd die Rolle des Drehzentrums. Im übrigen scheint das hier beschriebene Beispiel das einzige dieser Art zu sein.

2. Zweitens wollen wir feststellen, dass es beliebig viele Dreiecke D gibt, die unsere Eigenschaft sicher nicht aufweisen. Es sei D ein gleichschenkliges Dreieck. Der beim Mittelpunkt Z des Umkreises K von D gemessene Zentriwinkel des einem Schenkel zugeordneten Umkreisbogens sei a, und wir wollen voraussetzen, dass a mit π inkommensurabel ist. D kann dann unsere Eigenschaft nicht haben. In der Tat: Nehmen wir an, E sei eine D umschriebene von K verschiedene Eilinie der verlangten Art. Wir drehen nun D um den Umkreismittelpunkt Z der Reihe nach im positiven Sinn um die Winkel a, $2a$, $3a$, ... und bezeichnen die Drehbilder von D in gleicher Reihen-

[1]) Das nachfolgend angegebene Beispiel findet sich bei L. M. JAGLOM und W. G. BOLTJANSKI, *Konvexe Figuren* (Berlin 1956), S. 82.

folge mit D', D'', D''', ... Es sei M die auf K liegende Menge aller Eckpunkte der Dreiecke D, D', D'', ... Nach der elementargeometrischen Sachlage (vgl. Figur 2) haben zwei aufeinanderfolgende Dreiecke der Dreiecksfolge einen Schenkel gemeinsam, und hieraus folgt leicht, dass M auch auf E liegen muss. Da aber α/π irrational ist, liegt die Punktmenge M auf K überall dicht[2]), so dass E mit K identisch sein muss, im Widerspruch zu unserer Gegenannahme. Damit ist unsere sich auf D beziehende Behauptung bewiesen.

3. Sollte das reguläre Dreieck tatsächlich das einzige Dreieck mit der hier erörterten Eigenschaft sein, so wäre der folgende Satz richtig: *Lässt sich in einer Eilinie ein einbeschriebenes nichtreguläres Dreieck, sich selbst stets kongruent bleibend, stetig herumführen, so ist die Eilinie eine Kreislinie.*

Herrn W. Süss verdanken wir die Mitteilung[3]), dass diese Frage schon vor Dezennien aufgeworfen und beispielsweise in Gesprächen mit T. Kubota erörtert worden ist, ohne dass diese unseres Wissens bis heute beantwortet werden konnte. Unser Problem besteht also darin, den oben formulierten Satz entweder zu beweisen oder zu widerlegen.

H. Hadwiger

Aufgaben

Aufgabe 281. a) Démontrer que toutes les solutions en nombres rationnels non nuls x, y, z de l'équation $x^2+y^3=z^4$ sont contenues dans les formules

$$x = a\,(b^2-a^2)^4\,b^{-3}, \qquad y=(b^2-a^2)^3\,b^{-2}, \qquad z=(b^2-a^2)^2\,b^{-1},$$

où a et b sont des nombres rationnels non nuls, tels que $a^2 \neq b^2$.

b) Démontrer que toutes les solutions en nombres rationnels non nuls x, y, z, t de l'équation $x^2+y^3+z^4=t^2$ sont contenues dans les formules

$$x = a\,(c^2-a^2-b^2)^4\,b^{-3}, \qquad y=(c^2-a^2-b^2)^3\,b^{-2},$$
$$z = (c^2-a^2-b^2)^2\,b^{-1}, \qquad t=(c^2-a^2-b^2)^4\,b^{-3}\,c,$$

où a, b, c sont des nombres rationnels non nuls, tels que $c^2 \neq a^2+b^2$.

A. Schinzel, Varsovie

Lösung: Es wird unmittelbar verifiziert, dass

$$x = a\,(b^2-a^2)^4\,b^{-3}, \qquad y=(b^2-a^2)^3\,b^{-2}, \qquad z=(b^2-a^2)^2\,b^{-1} \tag{1}$$

für alle a und b die Gleichung

$$x^2+y^3=z^4 \tag{2}$$

erfüllen. Wenn umgekehrt die von Null verschiedenen rationalen Zahlen x, y, z (2) erfüllen, so setze man $a=x\,y^{-2}\,z \neq 0$, $b=y^{-2}\,z^3 \neq 0$. Man erhält

$$b^2-a^2=y^{-4}\,z^2\,(z^4-x^2)=y^{-1}\,z^2 \neq 0$$

und daraus durch Kombination mit den Ausdrücken für a und b sofort (1).

Die zweite Aufgabe wird ganz analog gelöst, nur setzt man hier $a=x\,y^{-2}\,z$, $b=y^{-2}\,z^3$, $c=y^{-2}\,z\,t$, wobei $c^2-a^2-b^2=y^{-1}\,z^2$.

A. Bager, Hjørring (Dänemark)

---

[2]) Nach einem bekannten Theorem von H. Weyl ist M auf K sogar gleichverteilt. Vgl. G. Pólya und G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, 1. Band (Berlin 1925), S. 71, Nr. 166.

[3]) Brief vom 20. September 1957 an den Unterzeichneten.