Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **12 (1957)**

Heft 6

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Selbstverständlich kann die Stumme Mora auch anders gespielt werden, so zum Beispiel nur mit vier Fingern. Da eine Hand fünf und nicht vier Finger aufweist, ergeben sich bei solchen Abarten leicht Zweideutigkeiten, so dass eine Änderung der Zahlenmatrix wohl vorzuziehen wäre.

Jedenfalls erscheint es überraschend, dass ein elementares Spiel wie die Stumme Mora bereits Ingredienzen enthält, zu deren Klärung die Hilfsmittel der Spieltheorie herangezogen werden müssen. P. Nolfi, Zürich

Aufgaben

Aufgabe 276. If $\{x\}$ denotes the integer closest to x, prove that

$$\sum_{k=1}^{n}\{\sqrt{k}\} = \frac{\{\sqrt{n}\}\left(3n+1-\{\sqrt{n}\}^2\right)}{3}. \tag{*}$$

Leo Moser, Edmonton (Kanada), und J. Lambek, Montreal

Lösung: Alle Buchstaben sollen natürliche Zahlen bedeuten. Es ist

$$\{\sqrt{a^2+a}\} = \left\{\sqrt{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right\} = a. \tag{1}$$

Unter den Zahlen k mit $\{\sqrt{k}\} = a$ ist a^2+a offenbar die grösste. Die Anzahl dieser k ist somit

$$a^2+a-[(a-1)^2+a-1] = 2a.$$

Hieraus folgt

$$\sum_{k=1}^{p^2+p}\{\sqrt{k}\} = \sum_{a=1}^{p} 2a^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{3} = \frac{p}{3}[3(p^2+p)+1-p^2]. \tag{2}$$

(*) ist also wegen (1) für $n = p^2+p$ richtig. Hieraus folgt für $q < 2p$

$$\sum_{k=1}^{n-q}\{\sqrt{k}\} = \frac{\{\sqrt{n}\}\left(3n+1-\{\sqrt{n}\}^2\right)}{3} - \sum_{k=n-q+1}^{n}\{\sqrt{k}\}. \tag{3}$$

Wegen

$$\{\sqrt{n}\} = p = \{\sqrt{n-q}\} \quad \text{und} \quad \sum_{k=n-q+1}^{n}\{\sqrt{k}\} = qp = q\{\sqrt{n-q}\}$$

geht (3) über in

$$\sum_{k=1}^{n-q}\{\sqrt{k}\} = \frac{\{\sqrt{n-q}\}\left[3(n-q)+1-\{\sqrt{n-q}\}^2\right]}{3}.$$

Auch in diesem Fall ist also (*) gültig. Da (2) für jedes p richtig ist, gilt (*) allgemein.

F. Leuenberger, Zuoz

Wird die rechte Seite von (*) mit $f(n)$ bezeichnet, so gilt

$$f(n+1)-f(n) = \{\sqrt{n+1}\}.$$

Wegen $f(1) = 1$ ergibt sich hieraus (*) durch vollständige Induktion.

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring), L. Carlitz (Durham, N. C., USA), R. Lauffer (Graz), F. Leuenberger (2. Lösung), H. Meili (Winterthur), J. Piehler (Leuna), W. Richter (Neuchâtel).

Aufgabe 277. Schneidet man einen (reellen) Strahl eines Büschels P mit den Asymptoten a_1, a_2 einer gegebenen Ellipse e, so erhält man zwei konjugiert komplexe Punkte A_1, A_2 mit den Laguerreschen Vertretern L, R. (Die Laguerreschen Vertreter eines konjugiert komplexen Punktepaares A_1, A_2 sind die reellen Schnittpunkte der durch A_1 und A_2 legbaren Minimalstrahlen.) Welche Kurven l und r erfüllen die Punkte L bzw. R, wenn g das Büschel P beschreibt?

Durchläuft P eine Kurve c, so erhält man zwei Kurvenscharen $\{l\}$ und $\{r\}$. Für welche Kurven c besteht jede Schar für sich aus kongruenten Kurven? Was erhält man speziell für $c = e$? R. Bereis und H. Brauner, Wien

Lösung der Aufgabensteller: Die Asymptoten a_1, a_2

$$a y \pm i b x = 0 \tag{1}$$

der Ellipse e

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \qquad (a > b) \tag{2}$$

werden von einer Geraden g des Büschels $P(x_1, y_1)$:

$$y - y_1 = k (x - x_1) \tag{3}$$

in den Punkten

$$A_1\left(a \frac{k x_1 - y_1}{k a + i b}, \quad -i b \frac{k x_1 - y_1}{k a + i b}\right),$$

$$A_2\left(a \frac{k x_1 - y_1}{k a - i b}, \quad i b \frac{k x_1 - y_1}{k a - i b}\right)$$

geschnitten. L und R sind die reellen Schnittpunkte der Minimalstrahlen durch A_1 und A_2; ihre Koordinaten lauten:

$$\left.\begin{aligned} &L\left[k a (a - b) \frac{k x_1 - y_1}{k^2 a^2 + b^2}, \quad b (a - b) \frac{k x_1 - y_1}{k^2 a^2 + b^2}\right], \\ &R\left[k a (a + b) \frac{k x_1 - y_1}{k^2 a^2 + b^2}, \quad -b (a + b) \frac{k x_1 - y_1}{k^2 a^2 + b^2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die Ortskurven $l(L)$ und $r(R)$ ergeben sich aus (4) durch Elimination des Büschelparameters k zu:

$$\left.\begin{aligned} l:&\quad a b (x^2 + y^2) - (a - b)(b x_1 x - a y_1 y) = 0, \\ r:&\quad a b (x^2 + y^2) - (a + b)(b x_1 x + a y_1 y) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Diese Kurven l und r sind demnach Kreise durch $O(0, 0)$, besitzen die Mittelpunkte

$$M_l\left(\frac{a - b}{2 a} x_1, \ -\frac{a - b}{2 b} y_1\right) \quad \text{und} \quad M_r\left(\frac{a + b}{2 a} x_1, \ \frac{a + b}{2 b} y_1\right)$$

und die Radien

$$\varrho_l = \frac{a - b}{2 a b} \sqrt{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2}, \qquad \varrho_r = \frac{a + b}{2 a b} \sqrt{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2}. \tag{6}$$

Der Kreis l geht in den Kreis r durch Spiegelung an der x-Achse und nachfolgender zentrischer Streckung $(O; (a - b):(a + b))$ über. Ihre Chordale ist der zum Ellipsendurchmesser durch P konjugierte Durchmesser. Die Mittelpunkte M_l und M_r sind übrigens die Laguerreschen Vertreter der konjugiert komplexen Restecken eines asymptotenparallelen Parallelogramms mit den Gegenecken O, P.

Durchläuft der Büschelträger P eine zu e homothetische Ellipse $\bar{e}$, so bilden nach (6) sowohl die Kreise l als auch die Kreise r je eine Drehkreisschar. Speziell für $c = e$ erhält man

$$\varrho_l = \frac{a - b}{2}, \qquad \varrho_r = \frac{a + b}{2}.$$

Bemerkung: Die zu einem Strahlbüschel P gehörigen Kreise l und r entsprechen einander auch in der Schwarzschen Spiegelung an dem Asymptotenpaar a_1, a_2.

Eine weitere Lösung sandte R. LAUFFER, Graz.

Aufgabe 278. Man beweise

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^{12}}} : \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \sqrt[4]{\frac{4}{27}}.$$

E. TROST, Zürich

Solution:

$$I_{12} = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^{12}}} = \frac{1}{12}\int_0^\infty \frac{dz}{z^{11/12}(1+z)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{12}\int_1^\infty \frac{du}{(u-1)^{11/12}\,u^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{12}\int_0^1 \frac{dv}{v^{7/12}(1-v)^{11/12}} = \frac{1}{12} B\left(\frac{5}{12}, \frac{1}{12}\right),$$

where $x^{12} = z$, $1 + z = u$, $1/u = v$.

Similarly

$$I_4 = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{4} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

Thus

$$\frac{I_{12}}{I_4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{B\left(\frac{5}{12}, \frac{1}{12}\right)}{B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{5}{12}\right)}{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right\}^2}.$$

Since (by the triplication formula)

$$\Gamma\left(\frac{1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{5}{12}\right)\Gamma\left(\frac{9}{12}\right) = (2\pi)\, 3^{1/4}\, \Gamma\left(\frac{1}{4}\right),$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{5}{12}\right)}{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right\}^2} = \frac{3^{1/4}\,(2\pi)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = 3^{1/4}\, 2^{1/2},$$

so that

$$\frac{I_{12}}{I_4} = 3^{-3/4}\, 2^{1/2} = \left(\frac{4}{27}\right)^{1/4}.$$

L. CARLITZ, Duke University, Durham, N.C. (USA).

Weitere Lösungen sandten L. KIEFFER (Luxemburg) und F. LEUENBERGER (Zuoz).

Aufgabe 279. Die m^n Punkte $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, x_i ganz, $0 \leq x_i \leq m-1$, sind Punkte eines Gitters, welche in der Begrenzung oder im Innern eines n-dimensionalen Würfels W_m^n mit der Kantenlänge $m-1$ liegen. Man bestimme die Anzahl $N_{m,k}^{(n)}$ der Gitterpunkte des Würfels W_m^n, welche im $S^{n-1} \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i - k = 0$ liegen.

R. LAUFFER, Graz

Lösung: Die gesuchte Anzahl der Gitterpunkte ist

$$N_{m,k}^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{[k/m]} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \binom{n-1+k-\nu m}{n-1} \quad (k \geqq 0;\ [a] = \text{grösste ganze Zahl} \leqq a). \tag{B}$$

Beweis: a) Selbstverständlich gelten für alle m und n die Formeln

$$N_{m,k}^{(n)} = 0 \quad (k < 0) \tag{1}$$

und

$$N_{m,0}^{(n)} = 1. \tag{2}$$

b) Wir zerlegen den n-dimensionalen Gitterwürfel W_m^n (mit der Kantenlänge $m-1$) in den Ursprungspunkt U und eine Anzahl i-dimensionale Gitterwürfel $\overline{W}_{m-1}^i$ (mit der Kantenlänge $m-2$), die ganz in den i-dimensionalen «Koordinatenräumen» liegen und deren dem Ursprung U zunächst gelegene Ecken in den entsprechenden Unterräumen

$$S^{n-1} \equiv \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu - i = 0 \tag{3}$$

liegen:

$$W_m^n = U + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \overline{W}_{m-1}^i. \tag{4}$$

Berücksichtigen wir (3) und (4), so erhalten wir für die Anzahl der Gitterpunkte die Rekursionsformel

$$N_{m,k}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} N_{m-1,\,k-i}^{(i)} \quad (k > 0;\ \text{für alle } n). \tag{5}$$

c) Die Formeln (1), (2) und (5) ermöglichen jetzt die induktive Beweisführung. Deren Voraussetzung (V) lautet:

(B) gilt in den Dimensionen $\leqq n-1$ (für alle m und k), in der n-ten Dimension dagegen für alle Gitterzahlen $\leqq m-1$ (für alle k).

Es bleibt also die Gültigkeit von (B) im n-dimensionalen Raum für die Gitterzahl m (für alle k) nachzuweisen. Wegen (2) braucht dieser Nachweis nur für $k > 0$ erbracht zu werden.

d) (V) und (5) ergeben zusammen

$$N_{m,k}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{k-i}{m-1}\right]} \binom{n}{i} \binom{i}{\nu} (-1)^\nu \binom{k-1-\nu(m-1)}{i-1}. \tag{6}$$

(Bemerkung: Die aus der Summenanschrift abzulesende Ungleichung

$$0 \leqq \nu \leqq \frac{k-i}{m-1}$$

ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass im Binomialkoeffizienten

$$\binom{k-1-\nu(m-1)}{i-1}$$

die «obere Zahl» nicht kleiner als die «untere Zahl» ausfallen darf.)

Durch Vertauschen der Summationsreihenfolge erhalten wir aus (6) die Formel

$$N_{m,k}^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i+1} \binom{i+1}{\nu} \binom{k-1-\nu(m-1)}{i} = \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu a_{m,k,\nu}. \tag{7}$$

Es ist sicher $a_{m,k,0} \neq 0$. Für $\nu > 0$ braucht $a_{m,k,\nu}$ nur dann nicht zu verschwinden, wenn $k-1-\nu(m-1) \geqq i \geqq \nu - 1$ wird, das heisst, wenn $\nu \leqq k/m$ ist. Daraus folgt aber

$$r = \left[\frac{k}{m}\right]. \tag{8}$$

Für Binomialkoeffizienten gelten die Formeln

$$\binom{r}{s}\binom{s}{t} = \binom{r}{t}\binom{r-t}{r-s} \tag{9}$$

und

$$\sum_{\alpha=0}^{t}\binom{r}{\alpha}\binom{s}{t-\alpha} = \binom{r+s}{t}. \tag{10}$$

Wir wenden (8), (9) und (10) auf die Formel (7) an und erhalten der Reihe nach

$$N_{m,k}^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{[k/m]}(-1)^\nu\binom{n}{\nu}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-\nu}{n-1-i}\binom{k-1-\nu(m-1)}{i}$$

und

$$N_{m,k}^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{[k/m]}(-1)^\nu\binom{n}{\nu}\binom{n+k-1-\nu m}{n-1},$$

was nachzuweisen war.

e) Die Formel (2) stellt in jeder Dimension n den Beginn der Induktionskette dar, womit die allgemeine Gültigkeit von (B) erwiesen ist. J. C. Binz, Bern

Aufgabe 280. Die Seiten eines Dreiecks werden in je $n = 2k+1$ gleiche Teile geteilt und die Teilpunkte mit den Gegenecken verbunden. Im allgemeinen schneiden sich die Verbindungsgeraden nur paarweise.

a) Bestimme den kleinsten Wert von n so, dass wenigstens ein Knotenpunkt – das heisst ein gemeinsamer Punkt von drei Verbindungsgeraden – entsteht.

b) Bestimme die Anzahl der Knotenpunkte beim kleinstmöglichen Werte von n.

J. Schopp, Budapest

Lösung: Im Dreieck ABC liege A_1 auf BC, B_1 auf CA, C_1 auf AB. Nach Ceva ist ein Knotenpunkt dann und nur dann vorhanden, wenn

$$\overline{BA_1}\cdot\overline{CB_1}\cdot\overline{AC_1} = \overline{CA_1}\cdot\overline{AB_1}\cdot\overline{BC_1}. \tag{1}$$

Mittels einer Affinität kann erreicht werden, dass $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = n$. Wir können dann annehmen, dass alle Faktoren in (1) ganz und im Intervall $1 \leqq x \leqq n-1$ sind. Entsprechende Faktoren haben die Summe n und müssen daher verschiedene Parität haben. (1) hat also die Form

$$g_1 g_2 u_3 = u_1 u_2 g_3, \tag{2}$$

wo die g_i gerade, die u_i ungerade Zahlen aus dem betrachteten Intervall sind und wo zudem $u_i + g_i = n$.

Lemma A: Ist 2^{α_i} die höchste Potenz von 2 in g_i, so gilt $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3$. Der Beweis folgt unmittelbar aus (2).

Lemma B: Es ist nicht möglich, dass u_3 eine Primzahl und $3\,u_3 \geqq n$ ist.

Beweis: Aus (2) würde zum Beispiel $u_1 = u_3$, $g_1 = g_3$ und daher $g_2 = u_2$ folgen, was unmöglich ist.

Nach Lemma A ist $g_3 \equiv 0 \pmod 4$. Wir haben also nur die ungeraden $n \geqq 5$ zu betrachten:

$n = 5$: $g_3 = 4$, $u_3 = 1$, $g_1 = g_2 = 2$ (A), $u_1 = u_2 = 3$. (2) ist nicht erfüllt.

$n = 7$: $g_3 = 4$, $u_3 = 3$. Unmöglich (B).

$n = 9$: $g_3 = 4$, $u_3 = 5$ ist unmöglich (B). Wenn $g_3 = 8$, ist zum Beispiel $g_1 = 4$ (A), $u_1 = 5$. Da nun $u_3 = 1$, folgt aus (2) die unmögliche Beziehung $g_2 = 10\,u_2$.

$n = 11$: $u_3 = 7$ ist wegen B ausgeschlossen. Also ist $g_3 = 8$, $u_3 = 3$ und zum Beispiel $g_1 = 4$ (A), $u_1 = 5$, $3 g_2 = 10 u_2$, also $u_2 = 3$, $g_2 = 10$, $u_2 + g_2 \neq 11$.

$n = 13$: $g_3 = 8$ ist wegen B unmöglich. Wenn $g_3 = 4$, ist $u_3 = 9$. Wegen A gibt es für u_1, u_2 bzw. g_1, g_2 nur die Möglichkeiten 11, 7, 3 bzw. 2, 6, 10. Da $9 g_1 g_2 = 4 u_1 u_2$, bleibt nur $u_1 = u_2 = 3$, was aber wegen $g_1 = g_2 = 10$ keine Lösung von (2) gibt. Für $g_3 = 12$ ist $u_3 = 1$. Wegen $g_1 g_2 = 12 u_1 u_2$ muss zum Beispiel $g_1 = 6$ sein. Dann ist $u_1 = 7$ und $g_2 = 14 u_2 > 13$.

$n = 15$: Da $g_3 = 4$ und $g_3 = 8$ wegen B unmöglich sind, ist $g_3 = 12$, $u_3 = 3$, $g_1 g_2 = 4 u_1 u_2$. Nach A ist $g_1 \equiv g_2 \equiv 2 \pmod 4$. $g_1 = 2$ gibt $g_2 = 26 u_2 > 15$. $g_1 = 6$ gibt $g_2 = 6 u_2$, $g_2 + u_2 = 7 u_2 \neq 15$. Für $g_1 = 14$ ist $7 g_2 = 2 u_2$, also $2(u_2 + g_2) = 9 g_2 \neq 30$. Eine Lösung von (2) ergibt sich aber für $g_1 = 10$, wo $g_2 = 2 u_2$, $g_2 + u_2 = 3 u_2$, $u_2 = u_1 = 5$, $g_2 = g_1 = 10$.

Man überzeugt sich leicht davon, dass für $n = 15$ genau 6 Knotenpunkte vorhanden sind, die aus der obigen Lösung durch Vertauschung der Teilstücke bzw. der Dreiecksseiten entstehen.
A. BAGER, Hjørring

Weitere Lösungen sandten R. LAUFFER (Graz), F. STEIGER (Bern), R. WHITEHEAD (Camborne, England).

Neue Aufgaben

310. Es sei A ein konvexer Rotationskörper des gewöhnlichen Raumes mit der Oberfläche F. Bezeichnet f den Flächeninhalt eines Meridianschnittes von A (Schnittbereich von A mit einer durch die Achse hindurchgelegten Ebene) und f_0 den Flächeninhalt eines Äquatorschnittes (Schnittbereich von A mit einer auf der Achse orthogonal stehenden Ebene, die einen grössten Breitenkreis ausschneidet), so gilt die Ungleichung

$$F \leqq \pi f + 2 f_0,$$

wobei das Gleichheitszeichen für den Zylinder beansprucht wird. Für diese Aussage ist ein möglichst einfacher Beweis zu geben.
H. HADWIGER, Bern

311. Soit $P_1, P_2, \ldots$ une suite de points distincts partout dense dans l'intervalle (0, 1). Les points $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ subdivisent l'intervalle en n parties et le point P_n divise l'une d'elles en deux parties. En désignant par a_n et b_n les longueurs de ces deux parties, démontrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{1}{2}.$$

J. KARAMATA, Genève

312. Es ist zu zeigen, dass die Polarachse und die Geraden $\varphi = \pm \arccos \sqrt{0,5}$ den Umfang der Lemniskate $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ in acht Kurvenbogen von gleicher Länge zerlegen.
R. ROSE, Saarbrücken

313. Man suche jene zu einer gegebenen gleichseitigen Hyperbel h konzentrischen Ellipsen e, die durch das Polarsystem von h in sich übergehen. Charakterisiere eine solche Ellipse e; zeige ferner, dass die genannten Ellipsen eine einparametrige Mannigfaltigkeit bilden, und bestimme ihr Hüllgebilde.
R. BEREIS und H. BRAUNER, Wien

314. Man beweise: Ist n eine natürliche Zahl, $6n + 1$ eine Primzahl und (a/b) das Legendresche Symbol, so gilt

$$\sum_{k=1}^{6n} \left(\frac{k^3+1}{6n+1}\right) \equiv -1 - \binom{3n}{n} \pmod{6n+1}.$$

J. PIEHLER, Leuna

Berichtigung zur Aufgabe 301 (El. Math. *12*, 89–90): Der Schluss des zweiten Abschnitts muss folgendermassen lauten: Es sei $d_1 > d_2$. Für d_2 lässt sich $\mathfrak{K}_0$ auf unendlich viele Weisen in jeder der Formen S, R_1, R_2 realisieren. Für d_1 sind nur Realisierungen in der Form V möglich. Diese existieren aber nur, wenn $F_0^3 < 72 \pi V_0^2$.

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchwegs so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. Willi Lüssy, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Die Zahlen 2 und $1+i$ sind die ersten Glieder einer geometrischen Reihe. Zeichne die entsprechenden Punkte in der Ebene der komplexen Zahlen ein, verbinde sie der Reihe nach durch Strecken und berechne die Gesamtlänge dieses Streckenzuges, wenn die Reihe unbegrenzt fortgesetzt wird. $[2(\sqrt{2}+1).]$
2. Berechne die Fläche des Dreiecks, dessen Ecken in der Ebene der komplexen Zahlen gegeben sind:
$$A(5\,e^{i\pi/4}),\qquad B(3\,e^{5i\pi/6}),\qquad C(2\,e^{-i\pi/3}).$$
$$\left[\frac{25}{8}(\sqrt{2}+\sqrt{6})+\frac{3}{2}=12{,}5\sin 75^\circ+1{,}5.\right]$$
3. Aus
$$\begin{cases} a+b+c=0\\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0\end{cases}$$
folgt
$$a:b:c=1:\varepsilon_1:\varepsilon_2;\qquad \varepsilon^3=1.$$
4. Aus
$$a:b:c=(b-c):(c-a):(a-b)$$
folgt
$$a=b=c\qquad\text{oder}\qquad a:b:c=1:\varepsilon_1:\varepsilon_2;\qquad \varepsilon^3=1.$$
5. Über den Seiten eines beliebigen Vierecks $ABCD$ werden nach aussen die Quadrate errichtet. Ihre Mittelpunkte seien der Reihe nach M_1, M_2, M_3, M_4 (M_1 über AB). Die Strecken M_1M_3 und M_2M_4 sind stets gleich lang und stehen senkrecht aufeinander. [Es seien U_n $(n=1, 2, 3, 4)$ die Mitten von AB, BC, CD, DA, V_1 Mitte von AC, V_2 Mitte von BD. Nun ist
$$\overrightarrow{M_2U_2}=i\,\overrightarrow{U_1V_1},\quad \overrightarrow{U_2V_2}=i\,\overrightarrow{U_3M_3},\quad \overrightarrow{V_2U_4}=i\,\overrightarrow{M_1U_1},\quad \overrightarrow{U_4M_4}=i\,\overrightarrow{V_1U_3},$$
folglich
$$\overrightarrow{M_2M_4}=\overrightarrow{M_2U_2}+\overrightarrow{U_2V_2}+\overrightarrow{V_2U_4}+\overrightarrow{U_4M_4}=i\,(\overrightarrow{U_1V_1}+\overrightarrow{U_3M_3}+\overrightarrow{M_1U_1}+\overrightarrow{V_1U_3})=i\,\overrightarrow{M_1M_3}.]$$

Literaturüberschau

Compositio Mathematica

Volumen 13, Fasciculus 1

E. Snapper: *Higher-Dimensional Field Theory I, II, III.* B. H. Neumann: *Ascending Derived Series.* L. Carlitz: *Sets of Primitive Roots.* F. Bagemihl: *The Baire Category of Independent Sets.* Eugene Lukacs: *On Certain Periodic Characteristic Functions.*

J. Bass: *Cours de Mathématiques*

916 pages avec 363 figures. Masson et Cie, Paris 1956

Ainsi que le dit l'auteur dans son avant-propos: «(Ce livre) s'adresse à des étudiants qui sortent de mathématiques spéciales, ou qui ont reçu la formation de mathématiques générales, qui se destinent à être ingénieurs, mais qui n'ont encore aucune connaissance technique... L'objectif est avant tout de donner aux étudiants les bases mathématiques nécessaires pour leur permettre de suivre d'autres cours scientifiques (mécanique,