Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 11 (1956)
Heft: 4

Artikel: Eine Näherungsformel für die Schwingungsdauer eines Pendels
Autor: Wagner, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18624

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Eine Näherungsformel für die Schwingungsdauer eines Pendels

Im folgenden kann man prinzipiell die Verhältnisse am mathematischen Pendel studieren, dessen Schwingungsdauer proportional ist dem vollständigen elliptischen Integral 1. Gattung,

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\,K(k). \tag{1}$$

Dabei ist l die Länge des Pendels, g die Schwerebeschleunigung und $k = \sin\alpha/2$, wenn mit α der Amplitudenwinkel des Pendels bezeichnet wird.

Handelt es sich um ein physikalisches Pendel mit der Gesamtmasse m und dem Trägheitsmoment ϑ bezüglich seiner festen Achse, so hat man in (1) für l die reduzierte Länge

$$l_{red} = \frac{\vartheta}{m\,s} \tag{2}$$

(s = Schwerpunktsabstand von der festen Achse) einzusetzen. Überdies kann man auch noch das Trägheitsmoment ϑ eliminieren, wenn man zum sogenannten Reversionspendel übergeht, wie das in der Physik bei der Bestimmung von g üblich ist [1][1]).

Als eine erste Näherung der Gleichung (1) setzt man vielfach

$$T_1^* = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{3}$$

man hat also praktisch die linearisierte Pendelgleichung gelöst oder – was hier dasselbe ist – das erste Glied der Entwicklung von (1) genommen. Fügt man aus dieser Entwicklung noch das nächste Glied hinzu, so erhält man eine verbesserte Näherung

$$T_2^* = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\alpha^2\right), \tag{4}$$

wenn man sich auf kleine Winkelamplituden α beschränkt, das heisst $k = \sin\alpha/2$ durch $\alpha/2$ ersetzt.

PUWEIN [2] führte eine «mutierte» Pendellänge l_α ein,

$$l_\alpha = \frac{l}{\cos\alpha/2}, \tag{5}$$

womit eine weitere Verbesserung erzielt wurde

$$T_3^* = 2\pi\sqrt{\frac{l_\alpha}{g}}. \tag{6}$$

Die Entwicklung dieser Gleichung nach Potenzen von k ($\cos\alpha/2 = \sqrt{1-k^2}$) zeigt eine Übereinstimmung mit Gleichung (1) bis auf $k^4/64$. Bei Beschränkung auf kleine α ist die relative Genauigkeit also proportional $\alpha^4/1024$.

Ziel dieser Note ist eine im wesentlichen ebenso einfache Näherungsformel, die aber bis auf Potenzen von k^8 mit (1) gleichkommt.

---

[1]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, S. 86.

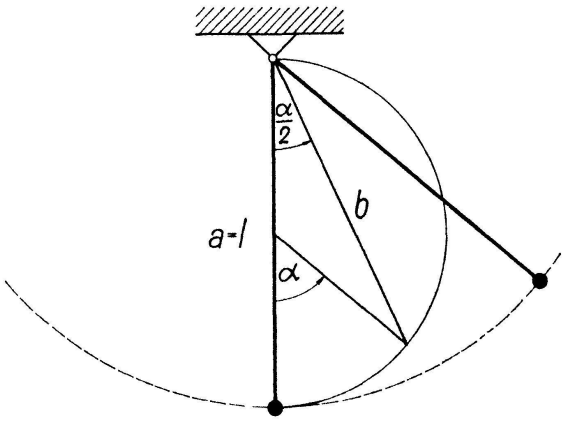
Dazu sei an eine aus vielen Lehrbüchern der Integralrechnung bekannte vorzügliche Näherungsformel zur Berechnung des Ellipsenumfangs erinnert. Ist der genaue Umfang

$$U = 4\,a\,E(k)\,, \tag{7}$$

wenn mit $k = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ die numerische Exzentrizität der Ellipse bezeichnet wird, so lautet diese Näherungsformel [3]

$$U^* = \pi\left(3\,\frac{a+b}{2} - \sqrt{a\,b}\right). \tag{8}$$

Die Entwicklung dieser Gleichung ist bis auf Potenzen von k^8 mit Gleichung (7) in Einklang, wobei insgesamt $U^* > U$ ist.



Figur 1
Die Bedeutung der Grössen a und b in Gleichung (9).

Man kann nun für die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels dasselbe wie beim Ellipsenumfang erreichen, wenn man in (8) das geometrische Mittel $\sqrt{a\,b}$ gegen das arithmetische $(a+b)/2$ vertauscht. Diese Vertauschung liegt (heuristisch gesehen) nahe, weil von der Theorie der ebenen Kurven her bekannt ist, dass bei den beiden Brennpunktskurven mit zwei Fixpunkten (Ellipse und Lemniskate) sowohl das arithmetische als auch das geometrische Mittel eine gewisse Rolle spielen. Da aber die Bogenlänge der Lemniskate wie hier die Schwingungsdauer auf ein vollständiges elliptisches Integral erster Gattung führt, scheint diese Vertauschung in (8) immerhin plausibel.

Man setzt nun als neue Näherung an

$$T_4^* = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{1}{b}\left(3\sqrt{a\,b} - \frac{a+b}{2}\right), \tag{9}$$

wobei der Analogie zu (8) wegen unter k^2 verstanden wird

$$k^2 = \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Der Faktor $1/b$ in (9) muss aus Dimensionsgründen hinzutreten, was auch aus dem Vergleich von (7) mit (8) hervorgeht. Dort war durch a dividiert worden, man hat also auch hier wieder vertauscht. Die Bedeutung der Grössen a und b gibt Figur 1 wieder.

Entwickelt man diesen Ausdruck (9) nach Potenzen von k, so folgt

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\,T_4^* &= \frac{1}{2b}\left(3\sqrt{ab}-\frac{a+b}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[3\,(1-k^2)^{-1/4}-\frac{1}{2}\left\{1+(1-k^2)^{-1/2}\right\}\right]\\ &= 1+\frac{1}{4}k^2+\frac{9}{64}k^4+\frac{25}{256}k^6+\frac{1220}{16\,384}k^8+\cdots.\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

Zum Vergleich entwickeln wir aus (1) ebenso den Ausdruck

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\,T=\frac{2}{\pi}K(k)=1+\frac{1}{4}k^2+\frac{9}{64}k^4+\frac{25}{256}k^6+\frac{1225}{16\,384}k^8+\cdots.\tag{11}$$

Die ersten vier Glieder zeigen Gleichheit, erst das fünfte Glied zeigt eine geringe Abweichung.

Im Gegensatz zur Ellipsennäherung (8) liefert die Näherung (9) jetzt etwas zu geringe Werte, was auch zu erwarten war.

Man schätzt den entstehenden Fehler sehr grob nach oben ab, wenn man die grössere Reihe (11) von k^{10} ab mittels der geometrischen Reihe majorisiert, während man sich die Reihe (10) der Einfachheit halber bei k^8 endend denken mag.

Damit ergibt sich aus

$$T=T_4^*+R_4$$

die folgende Abschätzung für den Fehler R_4

$$R_4<2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{k^8}{16\,384}\left(5+1225\,\frac{k^2}{1-k^2}\right).\tag{12}$$

Diese Überlegungen gelten aber nur für k-Werte, die nicht nahe bei 1 liegen, wie im späteren noch ausgeführt wird.

Verwendet man die Näherung (6) von PUWEIN, so lautet damit die neue Näherung (9) entsprechend

$$T_4^*=C(\alpha)\,T_3^*,\tag{13}$$

wobei die weitere Verbesserung durch den Faktor

$$C(\alpha)=\frac{3}{2}-\frac{1+\cos\alpha/2}{4\sqrt{\cos\alpha/2}}\tag{14}$$

zustande kommt.

Eine andere Schreibweise für diese neue Näherung ist mit $\sec\alpha/2=1/(\cos\alpha/2)$ gegeben [4]:

$$T_4^*=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\left(6\sqrt{\sec\frac{\alpha}{2}}-\sec\frac{\alpha}{2}-1\right),\tag{15}$$

entsprechend dazu der Fehler nach (12)

$$R_4<2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{\sin^8\alpha/2}{16\,384}\left(5+1225\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

Die Näherung (15) liefert für $\alpha\to 0$ richtig

$$\lim_{\alpha\to 0}T_4^*=T_1^*.$$

Doch für $\alpha \to \pi$ ergibt sich

$$\lim_{\alpha \to \pi} T_4^* = -\infty,$$

im Gegensatz zur Formel (6) von PUWEIN, die hier – wie es nach (1) sein muss – den uneigentlichen Grenzwert $+\infty$ hat. Dieser Unterschied liegt in der Reihenentwicklung (10) begründet, die für hohe Potenzen in k negative Koeffizienten bringt. Das «Umschlagen» in das Negative macht sich jedoch erst bei Werten k nahe der 1 bemerkbar, also dort, wo die Formel ohnehin nicht mehr sinnvoll anwendbar wäre.

Um das genau zu untersuchen, genügt es, den Faktor

$$f(\alpha) = 6\sqrt{\sec\frac{\alpha}{2}} - \sec\frac{\alpha}{2} - 1$$

der Gleichung (15) zu betrachten. Er hat ein relatives Maximum bei $\sec \alpha/2 = 9$, das heisst $\alpha \approx 167°$. Dem entspricht der Wert $k = \sqrt{80/81}$. Von da an sinkt $f(\alpha)$ sehr rasch ab, doch ist selbst bei diesem Maximum die neue Näherung noch beträchtlich genauer als (6):

$$\frac{|T - T_3^*|}{T} \approx 3\,\frac{T - T_4^*}{T}.$$

Zum Schluss werden in einer Tabelle die Ergebnisse der Näherungen T_1^*, T_2^*, T_3^* und T_4^* für einige Amplitudenwinkel α mit den genauem Wert T verglichen [5].

Näherungswerte	Amplitudenwinkel α				
	120°	90°	60°	30°	10°
$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{g}{l}}\,T_1^*$	1,570796 27%	1,570796 15,3%	1,570796 6,8%	1,570796 1,7%	1,570796 0,2%
$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{g}{l}}\,T_2^*$ [1]	1,865321 14%	1,767146 4,7%	1,668971 1%	1,597102 0,07%	1,573779 0,0008%
$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{g}{l}}\,T_3^*$	2,221441 3%	1,868002 0,8%	1,687931 0,1%	1,598262 0,008 %	1,573793 0,00007%
$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{g}{l}}\,T_4^*$	2,154065 0,1%	1,853943 0,007%	1,685746 0,0002%	1,598142 —	1,573792 —
Genaue Werte					
$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{g}{l}}\,T = K(k)$	2,156516	1,854075	1,685750	1,598142	1,573792

[1]) Für die zahlenmässige Berechnung wurde hier entgegen Gleichung (4) verwendet

$$T_2^* = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}k^2\right).$$

Die Zahlen der Tabelle stellen die Näherungswerte des vollständigen elliptischen Integrals $K(k)$ mit $k = \sin\alpha/2$ dar.

In den oberen Halbzeilen stehen jeweils die errechneten Werte, in den unteren die prozentualen Abweichungen vom genauen Wert. H. WAGNER, Karlsruhe.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] SOMMERFELD, *Vorlesungen über theoretische Physik*, Bd. 1 (Wiesbaden 1949), S. 83.
[2] PUWEIN, *Die mutierte Pendellänge*, Öst. Ing.-Arch. *8*, 54 (Wien 1954).
[3] LOCHER-ERNST, *Differential- und Integralrechnung* (Basel 1948), S. 434.
[4] PETERS, *Sechsstellige Tafeln der trigonometrischen Funktionen* sin, cos, tg, ctg, sec, cosec (Bonn 1946).
[5] BYRD-FRIEDMAN, *Handbook of Elliptic Integrals* (Berlin 1954).

Ungelöste Probleme

Nr. 12. Herr H. LENZ (München) macht uns auf das folgende elementargeometrische Problem aufmerksam, dessen Lösung unseres Wissens noch nicht allgemein aufgefunden werden konnte: Wie gross kann der Flächeninhalt F eines ebenen konvexen n-Ecks vom Durchmesser $D = 1$ höchstens sein?

K. REINHARDT[1]) hat unter anderem gezeigt, dass unter allen n-Ecken mit vorgeschriebenem Durchmesser das reguläre n-Eck sicher dann den grösstmöglichen Flächeninhalt aufweist, wenn n ungerade ist. Für gerade $n > 4$ ist jedoch die Frage noch ungeklärt.

Für den Flächeninhalt F eines beliebigen n-Ecks vom Durchmesser $D = 1$ gilt die Ungleichung

$$F \leqq \frac{n}{2} \cos\frac{\pi}{n} \operatorname{tg}\frac{\pi}{2n} \qquad (n \geqq 3),$$

wobei das Gleichheitszeichen dann gilt, wenn n ungerade und das n-Eck regulär ist. Hierfür hat H. LENZ kürzlich[2]) einen übersichtlichen Beweis veröffentlicht. Die angewandte Methode zur Ermittlung des in unserem Sinne extremalen Polygons scheitert für gerade n am Umstand, dass es keine gleichseitigen Reuleaux-Polygone mit gerader Seitenzahl gibt. H. HADWIGER.

Aufgaben

Aufgabe 237. Es seien $a_1 < a_2 < \cdots$ die Zahlen mit höchstens zwei verschiedenen Primfaktoren. Dann ist zu zeigen, dass es eine Zahl $c > 0$ gibt, so dass für unendlich viele k

$$a_{k+1} - a_k > c \log k .$$

Lässt sich dieser Satz verschärfen? Kann man also zeigen, dass

$$\overline{\lim_{k=\infty}} \frac{a_{k+1} - a_k}{\log k} = \infty \ ?$$

P. ERDÖS, Jerusalem.

[1]) K. REINHARDT, *Extremale Polygone gegebenen Durchmessers*, Jber. dtsch. Math.-Ver. *31*, 251–270 (1922).
[2]) H. LENZ, *Zerlegung ebener Bereiche in konvexe Zellen von möglichst kleinem Durchmesser*, Jber. dtsch. Math.-Ver. *58*, 87–97 (1956).