Sur l'équation (x) = m

Autor(en): **Schinzel, André**

Objekttyp: **Article**

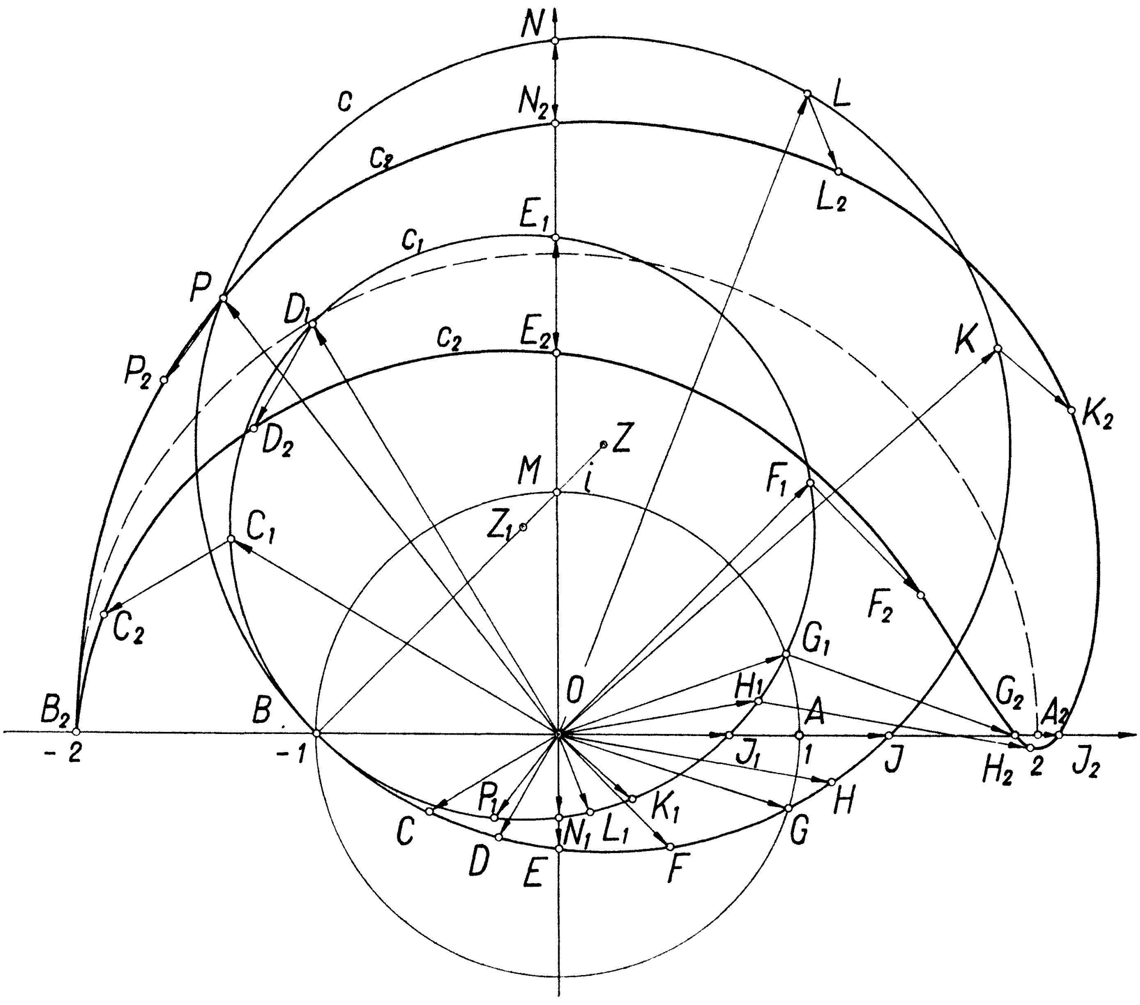
Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **11 (1956)**

Heft 4

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-18622



Figur 2

JOUKOWSKI[2]) angegeben worden. In der Folge sind dann Verfahren entwickelt worden, die in der Theorie der Tragflügel wirklich verwendet werden können. Es ist leicht ersichtlich, dass durch diese konforme Abbildung w_2 auch die einfachen Strömungsverhältnisse um einen Kreis (Zylinder) abgebildet werden können in die sehr komplizierten Strömungsverhältnisse um einen Tragflügel, jedoch erscheint es uns nicht zweckmässig, auf diese einzugehen. P. BUCHNER, Basel.

Sur l'équation $\varphi(x) = m$

L'équation $\varphi(x) = m$, *où* m est un nombre naturel donné et $\varphi(x)$ est la fonction connue de EULER-GAUSS (qui exprime le nombre de nombres naturels $\leqq x$ et premiers avec x) a été étudiée par plusieurs auteurs. En particulier on a examiné combien de solutions peut admettre cette équation pour m donnés.

M. M. G. BEUMER a posé le problème de démontrer qu'il existe une infinité de nombres naturels pairs m pour lesquels l'équation $\varphi(x) = m$ n'a pas de solutions[1]).

[2]) N. JOUKOWSKI, *Über die Konturen der Tragflächen der Drachenflieger*. Z. Flugtech. *1*, 281 (1910).

[1]) El. Math. *10*, 22 (1955), problème 230.

M. W. SIERPIŃSKI a démontré[2]) que tels sont par exemple les nombres $2 \cdot 5^{2^n}$, où $n = 1, 2, \ldots$ et aussi les nombres $m = 2p$, où p est un nombre premier $\equiv 1 \pmod 3$, et que, dans l'état actuel de la science nous ne savons pas résoudre le problème s'il existe une infinité de nombres premiers p pour lesquels l'équation $\varphi(x) = 2p$ a des solutions.

Or, je démontrerai un théorème qui résout une généralisation du problème de M. G. BEUMER.

Théorème 1. *Quel que soit le nombre naturel n, il existe une infinité de nombres naturels m qui sont des multiples de n, tels que l'équation $\varphi(x) = m$ n'a pas de solutions.*

Démonstration. Soit n un nombre naturel, $d_1, d_2, \ldots, d_s$ tous les diviseurs naturels de n. D'après le théorème connu de LEJEUNE-DIRICHLET il existe une infinité de nombres premiers p tels que

$$p \equiv 1 \pmod{d_i + 1} \quad (i = 1, 2, \ldots, s). \tag{1}$$

Soit p un de ces nombres premiers et supposons que le nombre naturel x satisfait à l'équation $\varphi(x) = p^k n$, où k est un nombre naturel. S'il était $p \mid x$, on aurait $p - 1 \mid \varphi(x)$, d'où, d'après notre équation, $p - 1 \mid n$, ce qui est impossible, vu que d'après (1) on a $p \equiv 1 \pmod{n + 1}$. On a donc $(x, p) = 1$. Soit $x = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_r^{\alpha_r}$ le développement du nombre x en facteurs premiers. On a donc

$$q_1^{\alpha_1 - 1}(q_1 - 1)\, q_2^{\alpha_2 - 1}(q_2 - 1) \cdots q_r^{\alpha_r - 1}(q_r - 1) = p^k n$$

et, comme $(x, p) = 1$, il existe un indice $i \leqq r$ tel que $p \mid q_i - 1$, d'où $q_i - 1 = p^l d_j$, où $l \geqq 1$ et d_j est un diviseur du nombre n. On a donc, d'après (1),

$$q_i = p^l d_j + 1 \equiv 1 \cdot d_j + 1 \equiv 0 \pmod{d_j + 1}$$

et, comme $q_i = p^l d_j + 1 > d_j + 1$ et q_i est un nombre premier, on aboutit à une contradiction. k pouvant être un nombre naturel quelconque, le théorème 1 se trouve démontré.

Si $n = 2$, $p = 7$, on a $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $s = 2$ et la formule (1) est vérifiée, d'où il résulte (d'après notre démonstration) que l'équation $\varphi(x) = 2 \cdot 7^k$ n'a pas de solutions pour k naturels. Or, comme on sait, pour $k = 0$ cette équation n'a que trois solutions: $x = 3$, 4 ou 6. On a ainsi ce

Corollaire 1. *L'équation $\varphi(x) = 2 \cdot 7^k$ a des solutions seulement si $k = 0$ (et alors $x = 3$, 4 ou 6).*

On connait l'hypothèse de R. D. CARMICHAEL qu'il n'existe aucun nombre naturel m pour lequel l'équation $\varphi(x) = m$ aurait une et une seule solution, ce qui a été vérifié par V. L. KLEE jr. pour $m \leqq 10^{400}$ [3]). Or, M. W. SIERPIŃSKI a démontré qu'il existe une infinité de nombres naturels m pour lesquels l'équation $\varphi(x) = m$ a précisément deux solutions: tels sont par exemple les nombres $m = 2 \cdot 3^{6k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Or, je démontrerai la généralisation suivante de cette proposition:

Théorème 2. *Si p est un nombre premier de la forme $4t + 3$ et si k est un nombre naturel, l'équation $\varphi(x) = p^{6k+1}(p - 1)$ a seulement deux solutions: $x = p^{6k+2}$ et $x = 2p^{6k+2}$.*

---

[2]) Voir solution du problème 230, El. Math. *11*, 37 (1956).

[3]) Voir V. L. KLEE, jr.: *On a Conjecture of Carmichael*, Bull. Amer. math. Soc. *53*, 1183 (1947).

Démonstration. Soit k un nombre naturel donné et p un nombre premier de la forme $4t+3$. On vérifie sans peine que les nombres $x = p^{6k+2}$ et $x = 2p^{6k+2}$ satisfont à l'équation $\varphi(x) = p^{6k+1}(p-1)$. Supposons maintenant que x est un nombre naturel tel que

$$\varphi(x) = p^{6k+1}(p-1), \quad x \neq p^{6k+2} \quad \text{et} \quad x \neq 2p^{6k+2}. \tag{2}$$

S'il était $x = 2^\alpha$, où α est un nombre naturel, on aurait $p^{6k+1}(p-1) = \varphi(x) = 2^{\alpha-1}$, ce qui est impossible, puisque $p \neq 2$. On a donc $x = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, où r est un nombre naturel, $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sont des nombres premiers, $2 < p_1 < p_2 < \cdots < p_r$, $\alpha \geqq 0$, $\alpha_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, ce qui donne

$$\varphi(x) = \varphi(2^\alpha)\, p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)\, p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1) \cdots p_r^{\alpha_r-1}(p_r-1)$$

et, comme $2 \mid p_i - 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ on trouve $\varphi(2^\alpha)\, 2^r \mid \varphi(x) = p^{6k+1}(p-1)$, d'où $\alpha \leqq 1$, $r = 1$, donc $x = 2^\alpha p_1^{\alpha_1}$ et $\varphi(x) = p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1) = p^{6k+1}(p-1)$. S'il était $p_1 = p$, on aurait $\alpha_1 - 1 = 6k+1$ et $x = 2^\alpha p^{6k+2}$, où $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, contrairement à (2). On a donc $p_1 \neq p$. S'il était $\alpha_1 > 1$, on aurait donc $p_1 \mid p-1$ et $p \mid p_1 - 1$, ce qui est impossible. On a donc $\alpha_1 = 1$, d'où $p_1 - 1 = p^{6k+1}(p-1)$ et

$$p_1 = p^{6k+1}(p-1) + 1 > p^2 + 1 > p^2 - p + 1,$$

et comme, d'autre part

$$p_1 = p^{6k+2} - p^{6k+1} + 1 = p^{6k}(p^2 - p + 1) - (p^{6k} - 1),$$

$$p^6 - 1 \mid p^{6k} - 1, \quad p^6 - 1 = (p^3 - 1)(p+1)(p^2 - p + 1),$$

on a $1 < (p^2 - p + 1) \mid p_1$, ce qui est impossible, vu que le nombre p_1 est premier.

Le théorème 2 se trouve ainsi démontré. Il en résulte immédiatement ce

Corollaire 2. *L'équation* $\varphi(x) = 6 \cdot 7^{12k+1}$, *où k est un nombre naturel, a précisément deux solutions*: $x = 7^{12k+2}$ et $x = 2 \cdot 7^{12k+2}$.

Théorème 3. *Il existe une infinité de nombres naturels m pour lesquels l'équation $\varphi(x) = m$ a précisément trois solutions. Tels sont, par exemple, les nombres $m = 12 \cdot 7^{12k+1}$ où $k = 1, 2, \ldots$.*

Démonstration. Soit k un nombre naturel et $m = 12 \cdot 7^{12k+1}$. On vérifie sans peine que

$$m = \varphi(3 \cdot 7^{12k+2}) = \varphi(4 \cdot 7^{12k+2}) = \varphi(6 \cdot 7^{12k+2}).$$

Supposons maintenant que

$$\varphi(x) = m, \quad x \neq 3 \cdot 7^{12k+2}, \quad x \neq 4 \cdot 7^{12k+2} \quad \text{et} \quad x \neq 6 \cdot 7^{12k+2}. \tag{3}$$

D'après $\varphi(x) = m$ il ne peut pas être $x = 2^\alpha$, où α est un entier $\geqq 0$.

S'il était $x = 2^\alpha y$, où $\alpha \geqq 2$ et $(y, 2) = 1$, on aurait

$$\varphi(x) = 2^{\alpha-1}\varphi(y) = 12 \cdot 7^{12k+1}, \quad \text{donc} \quad \alpha = 2 \quad \text{et} \quad \varphi(y) = 6 \cdot 7^{12k+1},$$

et, d'après le corollaire 2 on aurait $y = 7^{12k+2}$ [puisque $(y, 2) = 1$], d'où

$$x = 4y = 4 \cdot 7^{12k+2},$$

contrairement à (3).

Donc, le nombre x n'est pas divisible par 4 et on a $x = 2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ où r est un nombre naturel, $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sont des nombres premiers impairs distincts, $\alpha \leqq 1$ et $\alpha_i \geqq 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. On a donc

$$\varphi(x) = \varphi(p_1^{\alpha_1})\, \varphi(p_2^{\alpha_2}) \cdots \varphi(p_r^{\alpha_r}) = 12 \cdot 7^{12k+1}.$$

S'il était $r \geqq 3$, on aurait $8 \mid \varphi(x) = 12 \cdot 7^{12k+1}$, ce qui est impossible. On a donc $r \leqq 2$.

S'il était $r = 2$ alors, les nombres $\varphi(p_1^{\alpha_1})$ et $\varphi(p_2^{\alpha_2})$ étant pairs, un d'eux, soit $\varphi(p_1^{\alpha_1})$ serait égal à $2 \cdot 7^l$, où l est un entier $\geqq 0$, d'où, d'après le corollaire 1, $l = 0$ et $p_1^{\alpha_1} = 3$, donc $\varphi(p_1^{\alpha_1}) = 2$ et $\varphi(p_2^{\alpha_2}) = 6 \cdot 7^{12k+1}$ et, d'après le corollaire 2 on aurait $p_2^{\alpha_2} = 7^{12k+2}$, d'où $x = 2^{\alpha} \cdot 3 \cdot 7^{12k+2}$, contrairement à (3).

On a donc $r = 1$ et $\varphi(x) = \varphi(p_1^{\alpha_1}) = 12 \cdot 7^{12k+1}$ et évidemment on a $p_1 \neq 3$ et $p_1 \neq 7$, donc $\alpha_1 = 1$ et $p_1 - 1 = 12 \cdot 7^{12k+1}$, d'où $p_1 = 12 \cdot 7^{12k+1} + 1 > 5$, ce qui est impossible, vu que le nombre $12 \cdot 7^{12k+1} + 1$ est divisible par 5 (puisque $7^4 = 5t + 1$ et $12 \cdot 7 = 5u - 1$).

Nous avons ainsi démontré que l'équation $\varphi(x) = m$ a précisément trois solutions. Le théorème 3 est ainsi démontré.

M. W. SIERPIŃSKI a exprimé l'hypothèse que, quel que soit le nombre naturel $s > 1$, il existe une infinité de nombres naturels m pour lesquels l'équation $\varphi(x) = m$ a précisément s solutions. Or, nous ne savons pas démontrer même que pour tout nombre naturel $s > 1$ il existe au moins un nombre naturel m tel que l'équation $\varphi(x) = m$ a précisément s solutions.

Il est encore à remarquer que dans une communication présentée au Congrès des mathématiciens tchécoslovaques à Prague en 1955 j'ai démontré d'une façon tout-à-fait élémentaire que, quel que soit le nombre naturel s, il existe un nombre naturel m tel que l'équation $\varphi(x) = m$ a plus que s solutions. Tel est, par exemple, le nombre $m = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_s - 1)$, où p_i désigne le i-ème nombre premier. (L'équation $\varphi(x) = m$ est ici vérifiée par les nombres

$$x_0 = p_1 p_2 \cdots p_s \quad \text{et} \quad x_i = x_0 \frac{p_i - 1}{p_i},$$

où $i = 1, 2, \ldots, s$.)

ANDRÉ SCHINZEL, Varsovie.

Sur les tétraèdres équivalents à un cube

Rappelons que deux polyèdres sont dits équivalents lorsque l'on peut décomposer l'un en polyèdres partiels avec lesquels on peut construire l'autre. En 1900, HILBERT [1][1]) posait la question qui donna essor à l'étude de l'équivalence: Existe-t-il un tétraèdre qui ne soit pas équivalent à un cube? Peu après, DEHN [2] établissait des conditions algébriques nécessaires pour que deux polyèdres soient équivalents, ce qui permettait de montrer que le tétraèdre régulier n'est pas équivalent à un cube. Dès lors, la question inverse gagnait en intérêt: Existe-t-il un tétraèdre qui soit équivalent à un cube?

[1]) Les chiffres entre crochets renvoient à la Bibliographie, p. 81.