

# Kleine Mitteilungen

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **11 (1956)**

Heft 3

PDF erstellt am: **26.04.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

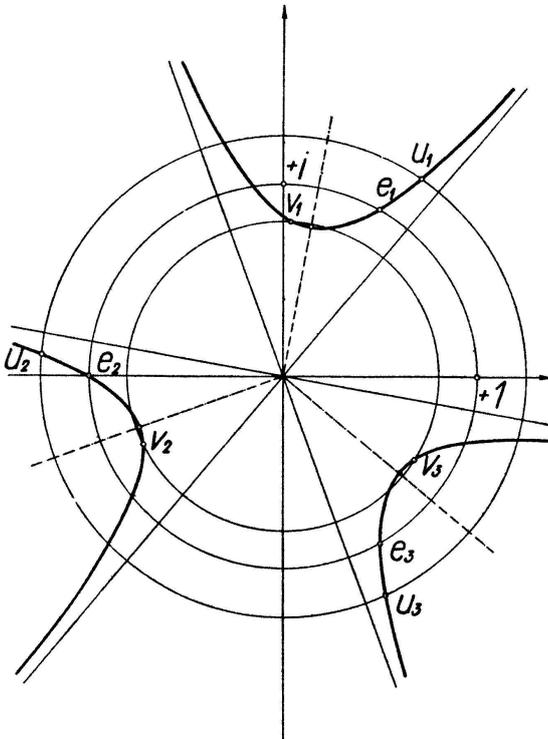
## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

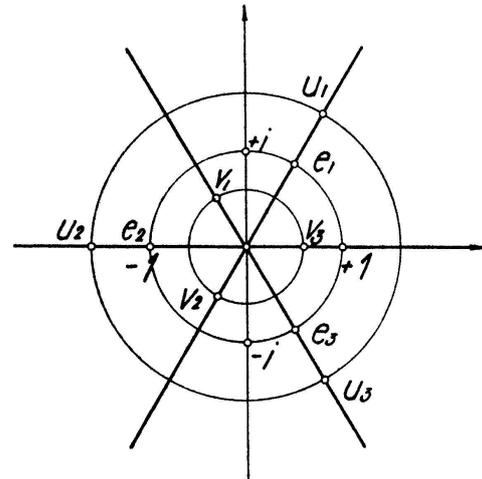
Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

usw.; jedoch immer so, dass die entsprechenden Kurven durch die Punkte  $e_1, e_2, e_3$  gehen. In diesem Falle gehören die Paare  $u_1 v_3; u_2 v_1; u_3 v_2$  zu je einem Kurvenast und werden je von einem  $e_i$  getrennt, genau wie die neue Stellung der  $p_i$  und unsere Zuordnungstabelle es verlangen.



Figur 6



Figur 7

Figur 6. Lage der Lösungen  $u_i$  und  $v_k$  für die gleichen Voraussetzungen wie Figur 5.  
Figur 7. Lage der Lösungen  $u_i$  und  $v_k$  für positive  $1 + p^3$ .

Aus den Figuren dürfte ersichtlich sein, wie die kardanische Lösungsmethode der kubischen Gleichung eine Symmetrie in das Problem hineinbringt, die die Lösungen  $x_i$  an sich nicht besitzen. Nur dieser Symmetrie ist es zu verdanken, dass die Auflösungsmethode so elementar ist.

H. SCHILT, Biel.

## Kleine Mitteilungen

### Eine Modifizierung der Simpsonschen Regel

Wenn wir zur Berechnung eines bestimmten Integrals auf numerische Methoden angewiesen sind, so stehen uns zahlreiche Formeln zur Verfügung. Eine der bekanntesten ist die sogenannte Simpsonsche Regel, die über eine gerade Anzahl Intervalle gleicher Breite zu integrieren gestattet. Sie beruht darauf, dass man über je zwei aufeinanderfolgende Intervalle einen quadratischen Parabelbogen spannt, der durch die drei zugehörigen Ordinatenpunkte geht. Indem man die Flächen unter den einzelnen Parabelbögen berechnet und dann addiert, erhält man den Ausdruck

$$F = \frac{h}{3} (y_0 + 4 y_1 + 2 y_2 + 4 y_3 + 2 y_4 + \dots + 4 y_{n-1} + y_n) + R_s, \quad (1)$$

wo  $h$  die Intervallbreite bezeichnet und  $n$  als gerade angenommen ist. Das Restglied lautet

$$R_s = -\frac{n h^5}{180} f^{IV}(\xi_s) \quad (a \leq \xi_s \leq b). \quad (2)$$

Die Simpsonsche Regel liefert das zu berechnende Integral mit erstaunlicher Genauigkeit, ist doch das Restglied  $R_s$  vierter Ordnung, das heisst sogar Polynome dritten Grades werden noch genau integriert, während wir ja zur Herleitung der Regel nur quadratische Parabeln verwendet haben<sup>1)</sup>.

Die Simpsonsche Regel weist leider zwei Schönheitsfehler auf: Erstens ordnet sie den einzelnen Ordinaten verschiedene Gewichte zu und zeichnet so gewisse vor den andern aus. Dies wird insbesondere dann störend, wenn es sich um Werte handelt, die empirisch gefunden und deshalb mit statistischen Schwankungen behaftet sind. Zum andern zeigt schon die Herleitung, dass die Simpsonsche Regel versagen muss, wenn wir es mit einer ungeraden Zahl von Intervallen zu tun haben. Im folgenden soll ein Weg gezeigt werden, diese beiden Schönheitsfehler auszumerzen. Die Integrationsregel, die wir erhalten, wird also für beliebiges  $n$  anwendbar sein und sämtlichen Ordinaten in genügendem Abstand von den Enden der Integrationsstrecke  $\langle a, b \rangle$  das gleiche Gewicht 1 zuordnen. Allerdings ist dies nur auf Kosten der Genauigkeit möglich; das Restglied bleibt zwar von derselben Ordnung, wird sich aber um einen unter 5 bleibenden Faktor vergrössern.

Wir unterscheiden zunächst zwei Fälle:

$\alpha)$   $n$  gerade: Wir berechnen zunächst nach (1) die Integrale über  $\langle a, b \rangle$  und über  $\langle a+h, b-h \rangle$  und addieren. Wir erhalten so eine Näherung der Fläche

$$F^* = 2F - F_1 - F_n,$$

wo  $F_1$  oder  $F_n$  die beiden Flächenstücke an den Enden des Intervalles  $\langle a, b \rangle$  bezeichnen. Das Koeffizientenschema lautet dann offenbar

$$F^* = \frac{h}{3} (y_0 + 5y_1 + 6y_2 + 6y_3 + \dots + 6y_{n-2} + 5y_{n-1} + y_n) + R^*. \quad (3)$$

$\beta)$   $n$  ungerade: Wir berechnen zunächst nach (1) die Integrale über  $\langle a, b-h \rangle$  und über  $\langle a+h, b \rangle$  und addieren. Wir erhalten so eine Näherung derselben Fläche

$$F^* = 2F - F_1 - F_n.$$

Das Koeffizientenschema lautet wiederum

$$F^* = \frac{h}{3} (y_0 + 5y_1 + 6y_2 + 6y_3 + \dots + 6y_{n-2} + 5y_{n-1} + y_n) + R^*. \quad (3)$$

Auch das Restglied hat beide Male dieselbe Gestalt

$$R^* = -\frac{(n-1)h^5}{90} f^{IV}(\xi^*) \quad (a < \xi^* < b). \quad (4)$$

Nun müssen wir für sich die Flächen über den Endintervallen berechnen. Die Newtonsche Interpolationsformel, auf zwei Intervalle angewandt, lautet<sup>2)</sup>

$$f(x) = y_0 + \binom{t}{1} \Delta y_0 + \binom{t}{2} \Delta^2 y_0 + h^3 f'''(\xi) \binom{t}{3},$$

<sup>1)</sup> Siehe zum Beispiel A. OSTROWSKI, *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*, Bd. 2 (Birkhäuser, Basel 1951), S. 320.

<sup>2)</sup> A. OSTROWSKI, *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*, Bd. 2 (Birkhäuser, Basel 1951), S. 302.

wo  $(x - x_0)/h = t$  gesetzt ist und  $x_0 \leq \xi \leq x_0 + 2h$ . Integration über das erste Teilintervall liefert

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx &= h \int_0^1 f(x_0 + ht) dt \\ &= h \left[ t y_0 + \frac{t^2}{2} (y_1 - y_0) + \left( \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4} \right) (y_0 - 2y_1 + y_2) \right]_0^1 \\ &\quad + \frac{h^4}{6} \int_0^1 f'''(\xi) t(t-1)(t-2) dt. \end{aligned}$$

Im letzten Integranden ist  $\xi$  eine Funktion von  $t$ . Da weiter  $P(t) = t(t-1)(t-2)$  im Innern des Integrationsintervalles keine Nullstellen aufweist, lässt sich auf dieses Integral der erweiterte Mittelwertsatz anwenden, so dass es sich folgendermassen schreiben lässt

$$\frac{h^4}{6} \int_0^1 f'''(\xi) t(t-1)(t-2) dt = \frac{h^4}{6} f'''(\xi_1) \int_0^1 (t^3 - 3t^2 + 2t) dt.$$

Man erhält somit

$$F_1 = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx = h \left( \frac{5}{12} y_0 + \frac{2}{3} y_1 - \frac{1}{12} y_2 \right) + \frac{h^4}{24} f'''(\xi_1), \quad (5.1)$$

wo  $x_0 \leq \xi_1 \leq x_0 + 2h$ .

Analog ergibt die Integration über das letzte Teilintervall

$$F_n = \int_{x_n-h}^{x_n} f(x) dx = h \left( -\frac{1}{12} y_{n-2} + \frac{2}{3} y_{n-1} + \frac{5}{12} y_n \right) - \frac{h^4}{24} f'''(\xi_n), \quad (5.2)$$

wo  $x_n - 2h \leq \xi_n \leq x_n$ .

Ergänzt man nun  $F^*$  durch die Flächen über den beiden Endintervallen zu  $2F$ , so erhält man nach (3) und (5) folgendes Koeffizientenschema

$$\begin{aligned} 2F &= \frac{h}{12} (9y_0 + 28y_1 + 23y_2 + 24y_3 + 24y_4 + \dots \\ &\quad \dots + 24y_{n-3} + 23y_{n-2} + 28y_{n-1} + 9y_n) + 2R. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, wenn wir die nach der Trapezregel erhaltene Fläche

$$h \left( \frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right)$$

mit  $F_T$  bezeichnen

$$F = F_T + \frac{h}{24} (-3y_0 + 4y_1 - y_2 - y_{n-2} + 4y_{n-1} - 3y_n) + R. \quad (6)$$

Gemäss (4) und (5) beträgt das Restglied der so berechneten Fläche

$$\begin{aligned} 2R &= - \left. \begin{aligned} &\frac{(n-1)h^5}{90} f^{IV}(\xi^*) + \frac{h^4}{24} f'''(\xi_1) - \frac{h^4}{24} f'''(\xi_n) \\ &= - \left[ \frac{(n-1)h^5}{90} f^{IV}(\xi^*) + \frac{\mu h^5}{24} f^{IV}(\xi_\mu) \right], \end{aligned} \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

wo  $\mu = n - 4\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ .

Da für  $n > 4$  beide Koeffizienten in (7) positiv sind, können wir den Mittelwertsatz mit Gewichten anwenden und schreiben

$$2R = -\frac{h^5}{360} f^{IV}(\xi_0) (19n - 60\vartheta - 4),$$

und somit

$$R = -\frac{nh^5}{180} f^{IV}(\xi_0) \left( \frac{19}{4} - 15\frac{\vartheta}{n} - \frac{1}{n} \right) \quad (a \leq \xi_0 \leq b). \quad (8)$$

Der Vergleich mit (2) zeigt, dass das Restglied der hier abgeleiteten Integrationsregel höchstens  $19/4$ mal so gross ist wie das Simpsonsche Restglied.

(6) kann nun, wie man leicht nachrechnet, folgendermassen umgeschrieben werden

$$F = F_T - \frac{1}{12} (\Delta y_{n-1} - \Delta y_0) - \frac{1}{24} (\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^2 y_0).$$

Dies zeigt, dass die hier abgeleitete Integrationsregel mit der sogenannten Gregoryschen Formel, genommen mit zwei Korrekturgliedern, übereinstimmt. Diese lautet nämlich

$$F = F_T - \frac{1}{12} (\Delta y_{n-1} - \Delta y_0) - \frac{1}{24} (\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^2 y_0) \\ - \frac{19}{720} (\Delta^3 y_{n-3} - \Delta^3 y_0) - \frac{3}{160} (\Delta^4 y_{n-4} + \Delta^4 y_0) - \dots$$

und leitet sich aus der Euler-Maclaurinschen Integrationsformel

$$F = F_T - \frac{h}{12} (y'_n - y'_0) + \frac{h^3}{720} (y'''_n - y'''_0) - \frac{h^5}{30240} (y^V_n - y^V_0) + \dots$$

ab<sup>3)</sup>. Es überrascht, dass wir auf diesem ganz andern Wege auf die Gregorysche Formel gestossen sind.

CHRISTIAN BLATTER, Basel.

### Über unstetige Funktionen von zwei Veränderlichen

Eine Funktion  $f(x, y)$  der beiden Veränderlichen  $x, y$  heisse im Punkte  $(\xi, \eta)$  partiell stetig, wenn die beiden Funktionen  $f(\xi+t, \eta)$ ,  $f(\xi, \eta+t)$  von  $t$  im Nullpunkt stetig sind. Allgemeiner heisse  $f(x, y)$  im Punkte  $(\xi, \eta)$  linear stetig, wenn für beliebiges  $\alpha$  die Funktion  $f(\xi+t \cos \alpha, \eta+t \sin \alpha)$  von  $t$  im Nullpunkt stetig ist.

Offenbar folgt aus der Stetigkeit von  $f(x, y)$  im Punkte  $(\xi, \eta)$  dort ihre lineare Stetigkeit, und aus der linearen Stetigkeit die partielle. Beide Aussagen sind aber nicht umkehrbar. Zum Beispiel ist die Funktion

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0 \quad (1)$$

im Nullpunkt partiell stetig, aber nicht linear stetig. Und die Funktion

$$g(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \quad g(0, 0) = 0 \quad (2)$$

ist im Nullpunkt linear stetig, aber nicht stetig. Beide Funktionen (1), (2) sind übrigens in allen anderen Punkten stetig. – Das Beispiel (1) findet man in jedem Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, das Beispiel (2) stammt von GENOCCHI-PEANO (vgl. Enzykl. math. Wiss. 2, A 1, Seite 48, Fussnote 254).

<sup>3)</sup> Siehe zum Beispiel E. T. WHITTAKER und G. ROBINSON, *The Calculus of Observations* (1926), S. 134f. (EULER-MACLAURIN), und S. 143 (GREGORY).

Alle bisher bekannten Beispiele solcher Funktionen  $f(x, y)$  haben aber, wie die überall stetigen Funktionen, die beiden folgenden Eigenschaften:

1. Sie sind in jedem abgeschlossenen Quadrat  $|x|, |y| \leq c$  beschränkt.
2. Sie nehmen in jedem abgeschlossenen Quadrat  $|x|, |y| \leq c$  ihre dortige untere Grenze  $\inf f(x, y)$  und obere Grenze  $\sup f(x, y)$  als Funktionswerte an.

Es dürfte daher die Bemerkung von Interesse sein, dass keine dieser beiden Eigenschaften für alle Funktionen der betrachteten Art gilt. Das soll durch zwei einfache, durch leichte Abänderung der Funktion (2) gebildete Beispiele belegt werden.

Zunächst ist die Funktion

$$F(x, y) = \frac{x^2 y^3}{(x^2 + y^4)^2} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \quad F(0, 0) = 0 \quad (3)$$

wieder im Nullpunkt linear stetig, aber nicht stetig, und in allen anderen Punkten stetig. Wegen

$$F(y^2, y) = \frac{1}{4y} \quad \text{für } y \neq 0$$

ist sie aber in keinem Quadrat  $|x|, |y| \leq c$  beschränkt.

Ebenfalls ist die Funktion

$$G(x, y) = \frac{x y^2}{(x^2 + y^4)(1 + x^2 + y^2)} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \quad G(0, 0) = 0 \quad (4)$$

im Nullpunkt linear stetig, aber nicht stetig, und in allen anderen Punkten stetig. Weiter gilt wegen

$$|G(x, y)| < \frac{1}{2}, \quad \lim_{y \rightarrow 0} G(\pm y^2, y) = \pm \frac{1}{2}$$

in jedem abgeschlossenen Quadrat  $|x|, |y| \leq c$

$$-\frac{1}{2} = \inf G(x, y) < G(x, y) < \sup G(x, y) = \frac{1}{2};$$

die Funktion (4) nimmt also weder ihre untere noch ihre obere Grenze als Funktionswert an.

HEINZ KÖNIG, Würzburg.

## Ungelöste Probleme

**Nr. 11.** Herr MARTIN KNESER machte bei verschiedenen Gelegenheiten auf ein Problem aufmerksam, das nach erstem Augenschein einen fast elementaren Charakter zu haben scheint, dessen Lösung aber, wie wir von verschiedener Seite vernehmen, noch nicht restlos glückte. Es handelt sich hierbei um folgendes: Es sollen  $P_1, \dots, P_n; Q_1, \dots, Q_n$   $2n$  Punkte des  $k$ -dimensionalen euklidischen Raumes bezeichnen, und für die Distanzen gelte  $d(P_i, P_j) \leq d(Q_i, Q_j)$  für jedes Indizespaar  $1 \leq i, j \leq n$ .

Bedeutet  $A$  bzw.  $B$  die Vereinigungsmenge der  $n$  Einheitskugeln mit den Mittelpunkten  $P_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) bzw.  $Q_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) und  $V(A)$  bzw.  $V(B)$  ihre Volumina, so gilt vermutlich  $V(A) \leq V(B)$ .

Diese Aussage würde, falls sichergestellt, innerhalb der Masstheorie nützliche Dienste als Hilfssatz leisten.

Beispielsweise würde sich mühelos folgern lassen, dass das untere Minkowskische Mass einer beliebigen beschränkten Punktmenge sich bei dehnungsloser Abbildung