sind, bei jeder Abzählung $r_1, r_2, r_3, \ldots$ wird jedoch die natürliche Ordnung vollkommen zerstört. Das heisst, die Ordnung innerhalb der abzählenden Folge $r_1, r_2, r_3, \ldots$ hat nichts zu tun mit der Ordnung, welche die r_i innerhalb C besitzen.

B: Das ist mir klar, aber was hilft es zur Abklärung meiner Frage?

A: Wie bereits bemerkt, hat man sich im Transfiniten mit Tatsachen abzufinden, die im Finiten unmöglich sind. Hierzu gehört nun auch der folgende Sachverhalt: *Die Elemente einer nicht abbrechenden Folge $r_1, r_2, r_3, \ldots$ lassen sich derart umordnen, dass sie in der neuen Anordnung nichtabzählbar viele Lücken aufweisen.* In der Tat, einerseits kann man die rationalen Zahlen r mit $0 \leqq r \leqq 1$ zum Beispiel durch die Folge

$$\frac{0}{1} = 0, \ \frac{1}{1} = 1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{2}{3}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{3}{4}, \ \frac{1}{5}, \ \frac{2}{5}, \ \frac{3}{5}, \ \frac{4}{5}, \ \frac{1}{6}, \ldots$$

abzählen, anderseits ergeben dieselben Zahlen, nach ihrer Grösse geordnet, eine lineare Ordnung mit den irrationalen Zahlen zwischen 0 und 1 als nichtabzählbar vielen Lücken. Ein merkwürdiges, kaum in die Anschauung zu fassendes Phänomen.

B: Jetzt wird mir auch klar, was meiner Frage unausgesprochen zugrunde liegt, nämlich die Annahme, die Lücken und die lückenbildenden Elemente irgendwie in umkehrbar eindeutige Beziehung setzen zu können, was aber weder bei den r-Lücken zwischen den irrationalen Elementen noch bei der komplementären Menge der Lücken zwischen den r möglich ist, weil eine Lücke sich nie unmittelbar an ein Element der betreffenden Menge anschliessen lässt. L. LOCHER-ERNST.

Ein kurzer Beweis der Divergenz der unendlichen Reihe $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{p_r}$

Schon EUKLID hat bewiesen, dass die Zahl der Primzahlen nicht endlich ist. EULER bewies, dass die unendliche Reihe $\sum_{r=1}^{\infty} 1/p_r$ divergiert, wo $p_1, p_2, \ldots, p_r, \ldots$ die Folge der Primzahlen ist.

Die folgende Beweisführung wird vom Begriff des unendlichen Produktes keinen Gebrauch machen.

Nehmen wir an, dass die gegebene Reihe konvergent ist. Dann gibt es eine natürliche Zahl k, so dass

$$\sum_{r=k}^{\infty} \frac{1}{p_r} = q < 1 .$$

Wir teilen jetzt die natürlichen Zahlen in drei Klassen:

Klasse A enthält alle natürlichen Zahlen, deren Primfaktoren alle die Ungleichung $p_j \geqq p_k$ befriedigen. Wir bezeichnen die Elemente dieser Klasse mit $n_1', n_2', \ldots, n_s', \ldots$.

Klasse B enthält alle natürlichen Zahlen, deren Primfaktoren alle die Ungleichung $p_i < p_k$ befriedigen. Wir bezeichnen die Elemente dieser Klasse mit $n_1'', n_2'', \ldots, n_s'', \ldots$.

Klasse C enthält alle natürlichen Zahlen, die weder in A noch in B zu finden sind. Wir bezeichnen die Elemente dieser Klasse mit $n_1''', n_2''', \ldots, n_s''', \ldots$. Die Zahl 1 ist Element der Klasse C. Wenn n_s''' von 1 verschieden ist, so ist $n_s''' = n_u' n_v''$.

Wenn unsere Voraussetzung richtig ist, so sind die folgenden Reihen konvergent:

$$\text{a)}\quad \frac{1}{n_1'}+\frac{1}{n_2'}+\cdots+\frac{1}{n_s'}+\cdots,$$

$$\text{b)}\quad \frac{1}{n_1''}+\frac{1}{n_2''}+\cdots+\frac{1}{n_s''}+\cdots,$$

$$\text{c)}\quad \frac{1}{n_1'''}+\frac{1}{n_2'''}+\cdots+\frac{1}{n_s'''}+\cdots,$$

denn

$$\frac{1}{n_1'}+\cdots+\frac{1}{n_s'}+\cdots<\sum_{r=k}^{\infty}\frac{1}{p_r}+\cdots+\left(\sum_{r=k}^{\infty}\frac{1}{p_r}\right)^s+\cdots=\frac{q}{1-q},$$

$$\frac{1}{n_1''}+\frac{1}{n_2''}+\cdots+\frac{1}{n_s''}+\cdots=\frac{1}{1-(1/p_1)}\cdot\frac{1}{1-(1/p_2)}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{1-(1/p_{k-1})},$$

$$\frac{1}{n_1'''}+\frac{1}{n_2'''}+\cdots+\frac{1}{n_s'''}+\cdots$$

$$=1+\left(\frac{1}{n_1'}+\frac{1}{n_2'}+\cdots+\frac{1}{n_s'}+\cdots\right)\left(\frac{1}{n_1''}+\frac{1}{n_2''}+\cdots+\frac{1}{n_s''}+\cdots\right)$$

$$<1+\frac{q}{1-q}\cdot\frac{1}{1-(1/p_1)}\cdot\frac{1}{1-(1/p_2)}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{1-(1/p_{k-1})}.$$

Die Summe absolut konvergenter Reihen ist auch konvergent. Somit würde die harmonische Reihe: $1+1/2+\cdots+1/s+1/(s+1)+\cdots$ konvergieren.

Das ist aber offenbar ein Widerspruch. Damit ist die Divergenz der Reihe $\sum_{r=1}^{\infty} 1/p_r$ bewiesen.

ERICH DUX, Szolnok (Ungarn).

Übersicht über die Nullstellen einer Funktion zweiten und dritten Grades

Jede ganze Funktion hat bekanntlich in der komplexen Zahlenebene so viele Nullstellen wie der Grad der Funktion angibt. Es ist reizvoll, die Veränderungen dieser Nullstellen zu betrachten, wenn die Parameter, die in der Funktion vorkommen, geändert werden. Dazu ist es bequem und anschaulich, die komplexen Zahlen durch Vektoren darzustellen.

a) *Quadratische Funktion.* Wir beginnen mit einer Vorbetrachtung über die Funktion zweiten Grades:

$$\eta=\xi^2+2\,a\,\xi+b. \tag{1}$$

a und b seien komplexe Zahlen; $a \neq 0$. Durch eine Drehstreckung in den komplexen Ebenen der η und der ξ:

$$\eta=a^2 w,\qquad \xi=a\,t \tag{2}$$

kann man die Form:

$$w=t^2+2\,t-q \tag{3}$$