Ungelöste Probleme

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **11 (1956)**

Heft 2

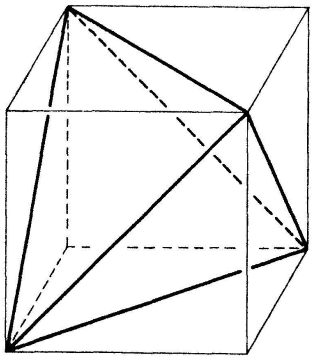
PDF erstellt am: **24.09.2024**

Ungelöste Probleme

Nr. 10. Eine H-Matrix (Hadamardsche Matrix) $\|a_{ik}\|$ $(i, k = 1, \ldots, n)$ enthält nur die Elemente 1 und -1 und ist orthogonal, so dass sie also durch die beiden Eigenschaften $a_{ik} = \pm 1$ und $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, a_{jk} = 0$ $(i \neq j)$ gekennzeichnet ist. Eine natürliche Zahl n nennt man weiter H-Zahl (Hadamardsche Zahl), wenn eine H-Matrix vom Grade n existiert. $n = 1$ und $n = 2$ sind H-Zahlen; die entsprechenden H-Matrizen sind trivial.

Eine vollständige Charakterisierung aller H-Zahlen ist bisher noch nicht gelungen. Man vermutet, dass eine natürliche Zahl $n > 2$ dann und nur dann eine H-Zahl ist, wenn sie durch 4 teilbar ist. Dass die Bedingung jedenfalls notwendig ist, zeigte schon

$$\left\| \begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right\|$$



J. Hadamard im Jahre 1893. Seine Untersuchungen standen im Zusammenhang mit der von ihm gefundenen bekannten Abschätzungsformel $|D| \leq n^{n/2}$ für die Determinante D einer Matrix n-ten Grades, deren Elemente der Nebenbedingung $|a_{ik}| \leq 1$ unterliegen. In der Hadamardschen Abschätzung gilt nämlich das Gleichheitszeichen genau dann, wenn die Matrix eine H-Matrix ist; dies kommt also nur für Grade in Betracht, die H-Zahlen sind.

Eine hübsche geometrische Interpretation der gleichen Frage gab H. S. M. Coxeter im Jahre 1933. Danach ist eine natürliche Zahl n genau dann eine H-Zahl, wenn es möglich ist, im $(n-1)$-dimensionalen euklidischen Raum ein reguläres Simplex in den Würfel einzulagern. Das obenstehende Bild zeigt eine H-Matrix vom Grade $n = 4$ und die damit im Zusammenhang stehende Einlagerung des regulären Tetraeders in den Würfel des dreidimensionalen (gewöhnlichen) Raumes.

Nach dieser Deutung wäre die Vermutung über die H-Zahlen auch dadurch bestätigt, dass man nachweisen würde, dass die Einlagerung des regulären Simplex in den Würfel nur in Räumen der Dimension $m \equiv 3 \pmod 4$ und $m = 1$ möglich wird.

Für viele Klassen von Zahlen, die durch 4 teilbar sind, ist der Nachweis, dass sie H-Zahlen sind, bereits gelungen. Bezeichnet n eine durch 4 teilbare Zahl, p und q Primzahlen, k und l beliebige natürliche Zahlen, so sind alle Zahlen der Form $n = p^k + 1$, $n = p\,(p+1)$, $n = p^k q^l + 1$ $(q^l - p^k = 2)$ [1]) H-Zahlen. Die kleinste durch

---

[1]) Dieses Ergebnis stammt von W. Gruner, Comment. Math. Helv. *12*, 149–152 (1939/40); der Sonderfall $k = l = 1$, $p, q =$ Primzahlzwilling hat kürzlich auch unter anderem A. Brauer, Math. Z. *58*, 219–225 (1953), mitgeteilt.

4 teilbare Zahl, von der noch nicht entschieden werden konnte, ob sie eine H-Zahl ist oder nicht, ist unseres Wissens $n = 92$. H. HADWIGER.

Berichtigung zu Nr. 9. Die beiden in der Tafel (Seite 16) angegebenen Tetraeder I und II besitzen das Volumen $V = 1/2$; damit diese, wie vorgesehen, das Volumen $V = 1$ aufweisen, sind die drei Kanten a, b und c je mit dem Faktor $\sqrt[3]{2}$ zu multiplizieren. Auf dieses Versehen wurde von Herrn F. FAEHNDRICH (Bern) aufmerksam gemacht.

Aufgaben

Aufgabe 229. Man bestimme den Pferchkreis der Höhenschnittpunkte aller Dreiecke, welche einem festen Kreis (M, r) eingeschrieben sind, und bei welchen
a) eine Ecke auf diesem Kreis ein fester Punkt ist,
b) die Ecken beliebig auf diesem Kreis liegen können. R. LAUFFER, Graz.

Lösung: a) A sei ein fester Peripheriepunkt und M der Mittelpunkt des gegebenen Kreises k. $\overline{AQ}$ sei eine Schwerlinie im einbeschriebenen Dreieck ABC. Für den Schwerpunkt S gilt $AS:AQ = 2:3$. Der Pferchkreis k_1 der Schwerpunkte steht also mit dem Kreis k in einer Homothetie mit dem Mittelpunkt A und mit der Charakteristik $2/3$. Der Mittelpunkt von k_1 teilt die Strecke $\overline{MA}$ im Verhältnis $1:2$, und der Halbmesser von k_1 beträgt $2r/3$. Auf der Euler-Geraden MS liegt auch der Höhenschnittpunkt H, und zwar so, dass $MH:MS = 3:1$. So steht der Pferchkreis der Höhenschnittpunkte in einer Homothetie mit k_1 mit dem Mittelpunkt M und mit der Charakteristik $3/1$. Der Mittelpunkt des Pferchkreises ist also A und sein Halbmesser $2r$.

b) Der Schwerpunkt eines dem Kreis k einbeschriebenen beliebigen Dreiecks ist immer ein innerer Punkt von k. Der Pferchkreis der Schwerpunkte ist also k selbst. Der Pferchkreis der Höhenschnittpunkte steht mit k in einer Homothetie, deren Mittelpunkt M und deren Charakteristik $3/1$ ist. Der Mittelpunkt des Pferchkreises ist also M und sein Halbmesser $3r$.

Falls wir die entarteten Dreiecke auch in Betracht ziehen, so gehören auch die Randpunkte der erwähnten Pferchkreise zu den Schwerpunkten bzw. Höhenschnittpunkten.

J. SCHOPP, Budapest.

Die Lösungen von A. BAGER (Hjørring) und J. ERDÖSI (Budapest) beruhen auf der Tatsache, dass das Spiegelbild von H bezüglich einer Dreiecksseite auf dem Umkreis liegt. H liegt daher auf der zu k bezüglich BC symmetrischen Kreisscheibe. H gehört daher immer zur Vereinigungsmenge V aller mit k kongruenten Scheiben, die Punkte mit k gemeinsam haben. V ist ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius $3r$. Bleibt A fest, so gehört H zur Vereinigungsmenge V' aller Scheiben, die A enthalten und zu k kongruent sind. V' ist ein Kreis mit Mittelpunkt A und Radius $2r$.

Das Resultat von b) ergibt sich auch unmittelbar aus der Formel

$$\overline{HM} = r\sqrt{1 - 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},$$

für $\beta = \gamma \to 0$ und $\alpha \to \pi$.

Weitere Lösungen sandten E. PETHES (Budapest) und I. ZANA (Budapest).

Aufgabe 230. Bekanntlich hat die Gleichung $\varphi(n) = a$, wo $\varphi(n)$ die Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen $< n$ bedeutet und a eine (notwendig) gerade Zahl ist, nicht immer eine Lösung; zum Beispiel für $a = 34$ gibt es keine Lösung n. Man beweise, dass es unendlich viele gerade Zahlen a gibt, für die die Gleichung keine Lösung besitzt.

M. G. BEUMER, Enschede (Holland).