

# Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **11 (1956)**

Heft 1

PDF erstellt am: **23.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Wenn die bis heute noch nicht erwiesene Vermutung richtig ist, dass die von M. DEHN im Jahre 1901 aufgestellten notwendigen Bedingungen für die Zerlegungsgleichheit zweier Polyeder auch hinreichend sind, so müsste sich die Zerlegungsgleichheit der beiden Tetraeder I und II mit dem Einheitswürfel feststellen lassen. Diese Bestätigung dürfte eine recht delikate elementargeometrische Aufgabe darstellen!

H. HADWIGER.

## Aufgaben

**Aufgabe 226.** Die Bewegungsgruppe des ebenen quadratischen Gitters lässt sich durch die beiden Elemente  $A$  und  $B$  erzeugen, die folgenden Relationen genügen:

$$A^4 = 1, \quad B^2 = 1, \quad (AB)^4 = 1.$$

Die beiden Elemente  $U = A^2B$  und  $V = ABA$  erzeugen die Translationen in der  $x$ - und  $y$ -Richtung. Man zeige ohne Geometrie und ohne Matrizen rein gruppentheoretisch:

1.  $U$  und  $V$  sind vertauschbar.
2.  $U$  und  $V$  sind von unendlicher Ordnung.
3. Zwischen  $U$  und  $V$  besteht keine weitere Relation.

A. SPEISER, Basel.

*Lösung:*  $\mathfrak{C}$  sei eine unendliche Gruppe mit zwei Erzeugenden  $A$  und  $B$ , die die Relationen

$$A^4 = 1, \quad B^2 = 1, \quad (AB)^4 = 1 \quad (1)$$

(und vielleicht noch andere) erfüllen. Wir setzen  $U = A^2B$ ,  $V = ABA$  und bekommen leicht mittels (1)

$$U^{-1}V^{-1}UV = BA^2A^{-1}BA^{-1}A^2BABA = (BA)^4 = A^{-1}(AB)^4A = 1.$$

Die Elemente  $U$  und  $V$  sind also vertauschbar und erzeugen daher eine Abelsche Untergruppe  $\mathfrak{S}$  von  $\mathfrak{C}$ . Man hat auch die folgenden Relationen:

$$AUV A^{-1} = A^{-1}BAB = V^{-1}U, \quad (2)$$

$$AU^{-1}VA^{-1} = ABA^{-1}B = VU, \quad (3)$$

$$AV^{-1}UA^{-1} = BVUB^{-1} = BABA^{-1} = U^{-1}V^{-1}, \quad (4)$$

$$AV^{-1}U^{-1}A^{-1} = BV^{-1}UB^{-1} = BA^{-1}BA = U^{-1}V. \quad (5)$$

In jeder Gruppe mit zwei Erzeugenden  $A$  und  $B$  ist die Kommutatorgruppe der von  $A^{-1}B^{-1}AB$  erzeugte Normalteiler, das heisst die von allen Konjugierten des Elements  $A^{-1}B^{-1}AB$  erzeugte Untergruppe. Nun zeigen (2), (3), (4), (5), dass die Transformationen mit  $A$  oder  $B$  die Elemente  $UV$ ,  $U^{-1}V$ ,  $UV^{-1}$  und  $U^{-1}V^{-1}$  permutieren. (Die Transformation mit  $B$  ist wegen  $B^2 = 1$  involutorisch.) Diese vier Elemente bilden somit ein vollständiges System von Konjugierten. Wegen

$$U^{-1}V^{-1} = (UV)^{-1}, \quad UV^{-1} = (U^{-1}V)^{-1} = A^{-1}B^{-1}AB$$

ist also die Kommutatorgruppe die von  $UV$  und  $U^{-1}V$  erzeugte Abelsche Untergruppe  $\mathfrak{N}$  in  $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{S}$ .

Wegen  $U = AVA^{-1}$  haben  $U$  und  $V$  beide unendliche Ordnung oder die gleiche endliche Ordnung. Wir nehmen das letztere an. Dann hat  $\mathfrak{S}$  und damit auch  $\mathfrak{N}$  endliche Ordnung. Nun entsteht die Faktorgruppe  $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ , indem man  $AB = BA$  zu den definierenden Relationen von  $\mathfrak{G}$  hinzufügt. Da dann  $(AB)^4 = 1$  ableitbar wird, gelten in  $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$  die Relationen  $A^4 = 1$ ,  $B^2 = 1$ ,  $AB = BA$ .  $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$  ist also isomorph einer Faktorgruppe der Abelschen Gruppe vom Typus  $(4, 2)$  und damit endlich. Da auch  $\mathfrak{N}$  endlich ist, ist  $\mathfrak{G}$  endlich, was der Voraussetzung widerspricht. Damit ist gezeigt, dass  $U$  und  $V$  von unendlicher Ordnung sind.

Mittels  $UV = VU$  kann jede Relation zwischen  $U$  und  $V$  auf die Form

$$U^m = V^n \quad (m \text{ und } n \text{ ganz}) \quad (6)$$

gebracht werden. Wird (6) mit  $A$  transformiert, so kommt

$$V^{-m} = U^n. \quad (7)$$

(6) und (7) geben nun

$$V^{n^2} = U^{mn} = V^{-m^2}, \quad V^{m^2+n^2} = 1. \quad (8)$$

Da  $V$  unendliche Ordnung hat, zeigt (8), dass  $m^2 + n^2 = 0$ , also  $m = n = 0$ . Damit ist gezeigt, dass jede Relation zwischen  $U$  und  $V$  eine Folge von  $UV = VU$  ist, mit andern Worten, dass  $\mathfrak{S}$  eine freie Abelsche Gruppe mit den (freien Abelschen) Erzeugenden  $U, V$  ist.

*Bemerkung:* Ist  $\mathfrak{F}$  die freie Gruppe mit den Erzeugenden  $A, B$  und  $\mathfrak{R}$  die Untergruppe, die aus den den Relationen (1) entsprechenden «Wörtern»  $A^4, B^2, (AB)^4$  erzeugt wird, so ist die gesuchte Gruppe  $\mathfrak{G}$  isomorph der Faktorgruppe  $\mathfrak{F}/\mathfrak{R}$ . Jede Gruppe, in der die Relationen (1) gelten, ist nach einem Satz von ДУЧК isomorph einer Faktorgruppe von  $\mathfrak{G}$ . Da wir eine unendliche Faktorgruppe angeben konnten, kann  $\mathfrak{G}$  nicht endlich sein.

A. BAGER, Hjørring, Dänemark.

**Aufgabe 227.** Die Asymptoten einer Hyperbel  $H$  schneiden aus der Tangente im Kurvenpunkte  $P$  eine Strecke ab, deren Länge mit  $2s$  bezeichnet sei. Von  $P$  aus trägt man auf der Normalen die Strecke  $PQ = s$  nach innen ab. Welche Kurve beschreibt  $Q$ , wenn  $P$  die Hyperbel durchläuft? Beziehungen zwischen  $H$  und  $K$ ?

L. LOCHER-ERNST, Winterthur.

*Lösung:* In einer starren, ruhend gedachten Ebene  $\Sigma_0$  liege eine Hyperbel  $h_0$  ( $O; a, b$ ) gezeichnet vor. Ihre Hauptachse sei die Abszisse, ihre Nebenachse die Ordinate eines Normalkoordinatensystems. Die Koordinaten  $(x, y)$  eines Punktes  $P_0$  von  $\Sigma_0$  seien – im Sinne der Gaußschen Zahlenebene – zur komplexen Zahl  $z = x + iy$  zusammengefasst. Die komplexe Gleichung von  $h$  lautet sodann

$$z = \frac{c}{2} \left( u e^{i\alpha} + \frac{1}{u} e^{-i\alpha} \right), \quad (1)$$

wobei  $c$  die lineare Exzentrizität,  $\alpha$  den halben Asymptotenwinkel und  $u$  einen reellen Parameter darstellen.

Nun denken wir uns eine dehnbare Ebene  $\Sigma$  (etwa in Häutchenform) auf  $\Sigma_0$  gelegt, in  $\Sigma$  die eine Scheiteltangente  $s_0$  von  $h_0$  und auf  $s_0$  den Scheitel  $S_0$ , sowie die Ecken  $E_0, D_0$  des Achsenrechteckes markiert. Deformieren wir sodann das Häutchen  $\Sigma$  derart, dass sein Punktfeld stets der Anfangslage  $\Sigma_0$  ähnlich bleibt, und achten darauf, dass  $s$  in jeder Lage  $h_0$  berührt und die Punkte  $E, D$  auf den entsprechenden Asymptoten gleiten, so rufen wir dadurch eine spezielle Bewegung eines ähnlich veränderlichen ebenen Systems hervor. Wählen wir in der Ausgangsstellung von  $\Sigma$  den Scheitel  $S$  als Ursprung eines Normalkoordinatensystems  $(\xi, \eta)$  mit  $s$  als  $\xi$ -Achse, so lässt sich die

Bahn jedes Punktes  $\zeta = \xi + i \eta$  von  $\Sigma$  im ruhenden System vermöge

$$z = \frac{c}{2b} \left[ u e^{i\alpha} (b + \zeta) + \frac{1}{u} e^{-i\alpha} (b - \zeta) \right] \quad (2)$$

angeben. Aus dieser «Bewegungsgleichung» erkennt man, dass jeder Punkt  $\zeta$  von  $\Sigma$  eine zu  $h_0$  konzentrische Hyperbel durchläuft.

Erteilt man insbesondere  $\zeta$  reelle Werte, so erhält man die Bahnen der Punkte von  $s$ , die nach (2) Hyperbeln darstellen, die mit  $h_0$  auch die Asymptoten gemein haben.

Rein imaginäre Werte von  $\zeta$  führen auf die Bahnen der Punkte jener Geraden von  $\Sigma$ , die sich in der Ausgangsstellung mit der Hauptachse von  $h_0$  deckt, und die daher in jeder Phase Normale von  $h_0$  bleibt. Ersetzen wir also in (2)  $\zeta$  durch  $di$  ( $d$  reell), so erhalten wir

$$z = \frac{c r}{2b} \left[ u e^{i(\alpha + \beta)} + \frac{1}{u} e^{-i(\alpha + \beta)} \right],$$

wobei  $b + di = r e^{i\beta}$  gesetzt wurde. Die Bahnen sind demnach hier zu  $h_0$  koaxiale Hyperbeln. Insbesondere liefert  $\zeta = -bi$  die Lösung der von L. LOCHER-ERNST gestellten Aufgabe:

$$z = \frac{c}{\sqrt{2}} \left[ u e^{i(\alpha - \pi/4)} + \frac{1}{u} e^{-i(\alpha - \pi/4)} \right].$$

Diese zu  $h_0$  koaxiale Hyperbel besitzt den Asymptotenwinkel  $2\alpha - \pi/2$ ; ihre halbe Hauptachse hat die Länge  $a + b$ .

Abschliessend sei noch auf die beiden Sonderfälle  $\zeta = ai$  und  $\zeta = -b^2/a$  hingewiesen. Es handelt sich somit um jene Punkte von  $\Sigma$ , die sich in der Ausgangsstellung mit  $O$  bzw. mit der Krümmungsmitte von  $S_0$  decken. Ihre Bahnen in  $\Sigma$  sind Geraden, die beiden Achsen von  $h_0$ .

R. BEREIS, Wien.

Eine andere komplexe Lösung sandte R. LAUFFER (Graz). A. BAGER (Hjørring) benutzt die Parameterdarstellung  $x = a \cosh t$ ,  $y = b \sinh t$ , während die übrigen Löser, J. BERKES (Szeged), J. ERDÖSI (Budapest), L. KIEFFER (Luxemburg), J. SCHOPP (Budapest), A. SCHWARZ (Seuzach) und I. ŽANA (Budapest), die gewöhnliche Mittelpunktsleichung der Hyperbel verwenden.

Eine weitere Verallgemeinerung der Aufgabenstellung findet man in der Arbeit von J. P. SYDLER, *Le triangle comme opérateur géométrique*, *El. Math.* 10, 100–105 (1955).

**Aufgabe 228.** Man konstruiere a) einen Rhombus, b) ein Rechteck, dessen Ecken auf vier gegebenen windschiefen Geraden liegen. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht.

*Lösung:* Wir unterscheiden zwei Fälle. Im ersten gibt es keine Ebene, zu welcher alle vier windschiefen Geraden parallel sind, im zweiten gibt es eine solche Ebene.

1. Die Ecken des gesuchten Parallelogramms  $ABCD$  seien der Reihe nach auf den Geraden  $a, b, c, d$  gelegen. Der Ort des Mittelpunktes  $O$  dieser Parallelogramme ist die Schnittgerade  $o$  derjenigen Ebenen («Mittlebenen»), welche die Abstände der Geraden  $a, c$  und  $b, d$  halbieren und zu  $a, c$  bzw.  $b, d$  parallel sind. Die Transversalen der Geraden  $a, o, c$  und  $b, o, d$  sind zu je einer der festen, sich schneidenden Ebenen  $\alpha$  und  $\beta$  parallel. Nun projizieren wir die Sekanten in der Richtung der Geraden  $a$  auf die Ebene  $\alpha$  bzw. in der Richtung  $b$  auf die Ebene  $\beta$ . Die Strecke zwischen der Projektion irgendeines Punktes auf  $o$  auf die Ebene  $\alpha$  und dem Schnittpunkt  $(\alpha, a)$  ist dem halben Abschnitt der Sekanten zwischen  $a$  und  $c$  gleich, welche die Gerade  $o$  im entsprechenden Punkte trifft. Ähnliches kann man von der Projektion auf der Ebene  $\beta$  behaupten.

a) Wir ziehen durch den Schnittpunkt  $(\alpha, a)$  Parallelen zu den Transversalen der Geraden  $b, o, d$ , projizieren dieses Strahlenbüschel senkrecht auf die Ebene  $\alpha$  und drehen die Figur um  $90^\circ$ . Wenn in beiden Transversalenscharen die durch denselben Punkt auf  $o$  gehenden Strahlen sich entsprechen, dann erhält man in der Ebene  $\alpha$  zwei konzentrische projektive Strahlenbüschel, deren Doppelstrahlen den Diagonalen des

gesuchten Rhombus entsprechen. (Wenn die verschiedenen möglichen Paarungen in Betracht gezogen werden, gibt es höchstens sechs Lösungen.)

b) Nun unterziehen wir die Projektion auf der Ebene  $\beta$  einer Ähnlichkeitstransformation, so dass die Projektionen der auf  $o$  befindlichen Punktreihe auf die Ebenen  $\alpha$  und  $\beta$  kongruent werden, und bringen die Ebenen  $\alpha$  und  $\beta$  zur Deckung, so, dass die Bilder der Punktreihe auf  $o$  identisch sind. Dann erhält man ein Diagramm, an welchem (im entsprechenden Maßstabe) die Länge der aus irgendeinem Punkte der Geraden  $o$  gezogenen beiden Sekanten ablesbar ist. Der Apollonische Kreis, der die Strecke zwischen den Punkten, die den Spuren der Geraden  $a$  und  $b$  entsprechen, mit Rücksicht auf die Massverhältnisse in der entsprechenden Proportion teilt, bezeichnet auf dem Bilde der Geraden  $o$  denjenigen Punkt, dessen zugehörige Transversalen die Diagonalen des gesuchten Rechtecks sind. (Es gibt ebenfalls sechs Lösungen.)

2. In diesem Fall kann die Aufgabe nur dann gelöst werden, wenn es eine solche Paarung der vier gegebenen Geraden gibt, bei der die Mittelebenen zusammenfallen. Dann gibt es unendlichviele Lösungen. Bei beliebiger Wahl der Punkte  $A$  und  $B$  ist:

a) jeder Peripheriepunkt des Schnittkreises der über den Durchmesser  $AB$  gespannten Kugel mit der Mittelebene der Mittelpunkt je eines Rhombus;

b) jeder Punkt der Schnittgeraden der mittelsenkrechten Ebene der Strecke  $AB$  und der Mittelebene das Zentrum eines Rechtecks. J. STROMMER, Budapest.

Eine weitere Lösung sandte R. LAUFFER (Graz).

### Neue Aufgaben

260. Wählt man auf jeder Seite eines Dreiecks einen Punkt, so bestimmen diese drei Punkte ein einbeschriebenes Dreieck und drei Randdreiecke. Man weise nach, dass die Fläche des einbeschriebenen Dreiecks mindestens so gross ist wie die des kleinsten Randdreiecks.

Gilt eine entsprechende Aussage für die Umfänge der Dreiecke?

H. DEBRUNNER, Bern.

261. Prove that the first  $n$  terms in the binomial expansion of  $(2 - 1)^{-n}$  sum to  $1/2$ .

LEO MOSER, Edmonton (Kanada).

262. Démontrer que l'intégrale double

$$\frac{h^2}{\pi} \iint e^{-h^2(x^2+y^2)} dx dy$$

étendu au domaine entre les droites  $y + p n = a^{-1}(x + p n)$  et  $y + p n = a(x + p n)$  est égale à l'intégrale simple

$$\frac{h_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-b}^{+b} e^{-h_1^2 \xi^2} d\xi \quad \left( h_1 = h p n, \quad b = \frac{a-1}{\sqrt{a^2+1}} \right).$$

H. BREMEKAMP, Delft.

263. Zwei Seiten eines konvexen Dreikants werden von einer Geraden  $g$  geschnitten. Man bestimme die zu  $g$  parallele Ebene so, dass der Schwerpunkt des entstehenden Tetraeders auf  $g$  liegt. J. SCHOPP, Budapest.

264. H. TIETZE hat 1947 auf die Aufgabe hingewiesen, die  $m^n$  Teil-Einheitswürfel eines  $n$ -dimensionalen Würfels der Kantenlänge  $m$  so zu numerieren, dass die maximale Nummerndifferenz benachbarter Teilwürfel ihren minimalen Wert  $M$  annimmt.

a) Man gebe den genauen Wert von  $M$  an, falls unter benachbarten Teilwürfeln solche mit einer gemeinsamen Ecke verstanden werden.

b) Man gebe obere und untere Schranken für  $M$  an, wenn als benachbart nur Würfel mit einer gemeinsamen  $(n-1)$ -dimensionalen Seite angesehen werden.

H. LENZ, München.

## Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll,  $x$ -Achse nach rechts,  $y$ -Achse nach vorn,  $z$ -Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Stelle im selben Koordinatensystem ( $1 \hat{=} 1,5$  cm) graphisch dar

$$a x + 2 a^2 y - 4 a^2 - 1 = 0$$

$$\text{für } a = \pm 4, \pm 2, \pm \frac{4}{3}, \pm 1, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{5}.$$

[Die Geraden hüllen die Parabel  $y = 2 - \frac{x^2}{8}$  ein.]

2. Es ist eine Walze ( $r, h$ ) gegeben. Es gibt eine zweite, von der ersten verschiedene Walze, die gleiches Volumen *und* gleiche Oberfläche wie die erste hat. Bestimme ihre Dimensionen allgemein und für  $r = 8$  cm,  $h = 48$  cm. In welchem speziellen Fall ist der zweite Zylinder mit dem ersten identisch? [Für den neuen Radius  $r_1$  ergibt sich eine kubische Gleichung, von der eine Wurzel  $r_1 = r$  bekannt ist.

$$r_1 = \frac{\sqrt{r^2 + 4 r h} - r}{2} = 16 \text{ cm}, \quad h_1 = \frac{r^2 + 2 r h + r \sqrt{r^2 + 4 r h}}{2 h} = 12 \text{ cm},$$

$$r_1 \equiv r \quad \text{für } h = 2 r.]$$

3. Fällt man die Lote von den Ecken eines beliebigen Vierecks auf die Diagonalen, so sind die Fusspunkte die Ecken eines dem ursprünglichen ähnlichen Vierecks.
4. Von einem Mittelpunktskegelschnitt (wähle zunächst eine Hyperbel) sind die Scheitelpunkte  $A_1, A_2$  und die Brennpunkte  $F_1, F_2$  gegeben. Schneide irgendeinen Kreis durch die Brennpunkte mit den Scheiteltangenten. Die Durchmesser dieses Kreises durch die Schnittpunkte (z. B.  $U, V$ ) sind Tangenten des Kegelschnitts. [Planimetrischer Beweis: Fülle die Lote  $F_1 P_1$  und  $F_2 P_2$  auf den Durchmesser  $UV$ . Dann ist (siehe Aufgabe 3!) das Viereck  $A_1 P_1 A_2 P_2$  ähnlich dem Viereck  $U F_1 V F_2$ , folglich wie dieses ein Sehnenviereck, sein Umkreis ist der Hauptkreis des Kegelschnitts.]
5. Ein Kreis in  $\Pi_1 [M(12; 7; 0), r = 4]$  ist Grundfläche eines Zylinders. Die Mantellinien sind parallel der Gerade durch  $O(0; 0; 0)$  und  $A(12; 5; 8)$ . Der Zylinder ist mit der Koinzidenzebene zu schneiden.

## Literaturüberschau

R. L. WILDER:

*The Foundations of Mathematics*

305 Seiten. John Wiley & Sons, New York 1952

Das Ziel des Buches besteht darin, die Natur und die fundamentalen Methoden der heutigen Mathematik zu beschreiben. Als rein mathematischen Inhalt findet man nur Elemente der Mengenlehre, der Theorie der reellen Zahlen und der Gruppentheorie. Das Hauptanliegen besteht in der Schilderung der Methoden. Die beiden ersten Kapitel geben einen ausgezeichneten Einblick in das Wesen der axiomatischen Methode. Die Kapitel 3 und 4 bringen eine Einführung in die Mengenlehre, die Begriffe Kardinal- und Ordinalzahl. Das fünfte Kapitel enthält eine ausführliche Beschreibung des linearen Kontinuums. Das sechste Kapitel ist dem Gruppenbegriff gewidmet. Das Wesentliche dieser ersten 184 Seiten besteht aber darin, dass die eingeführten Begriffe gründlich untersucht, von mehreren Seiten her analysiert und an vielen Beispielen erläutert werden.