Aufgaben

Nachtrag zu Nr. 2: Kürzlich ist es H. G. EGGLESTON [*Covering a Three Dimensional Set with Sets of Smaller Diameter*, J. London Math. Soc. *30*, 11–24 (1955)] gelungen, die Aussage $D_3 < 1$ zu beweisen. Damit ist die Richtigkeit der Borsukschen Vermutung auch für den dreidimensionalen Raum bestätigt.

Aufgaben

Aufgabe 211. Ein quadratisches Papier werde so gefaltet, dass eine Ecke auf eine der beiden nicht von dieser Ecke ausgehenden Seiten zu liegen kommt. Durch das Falten entstehen drei «überschiessende» Dreiecke. Die Summe dieser Dreiecke soll zu einem Maximum gemacht werden. Wo liegt die abgebogene Ecke, und wieviel Prozent der Gesamtfläche machen die überschiessenden Flächen aus? E. ROTHMUND, Zürich.

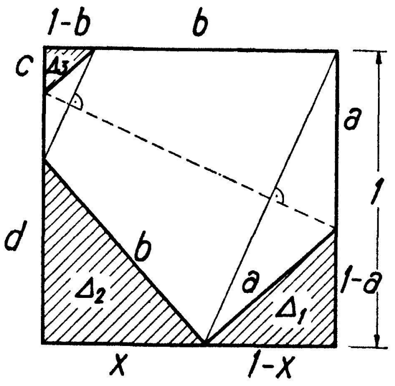
Lösung: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man die Aufgabe am Einheitsquadrat lösen.

Aus der untenstehenden Figur folgt die Ähnlichkeit der drei Dreiecke; es gilt daher

$$\frac{1-a}{1-x} = \frac{x}{d} = \frac{c}{1-b}. \tag{1}$$

Die Grössen a, b, c und d bestimmen sich dann nacheinander zu

$$a = 1 - x + \frac{x^2}{2}.$$



Ferner mit Hilfe von (1):

$$d = x\,\frac{1-x}{1-a} = \frac{2(1-x)}{2-x},$$

und ebenso mittels der Ähnlichkeit

$$b = \frac{a\,d}{1-x} = \frac{2 - 2x + x^2}{2-x}$$

sowie mit (1):

$$c = \frac{x}{d}(1-b) = \frac{x^2}{2}.$$

Damit haben wir die einzelnen Dreiecksinhalte

$$\triangle_1 = \frac{1-a}{2}(1-x) = \frac{(2-x)\,x(1-x)}{4},$$

$$\triangle_2 = \frac{d}{2}\,x = \frac{(1-x)\,x}{2-x},$$

$$\triangle_3 = \frac{c}{2}(1-b) = \frac{x^2}{4}\cdot\frac{x-x^2}{2-x}.$$

Für die Summe der «überschiessenden» Dreiecke gilt dann

$$\triangle(x) = \sum_{i=1}^{3} \triangle_i = (1-x)\,x\,\frac{x^2-2x+4}{2(2-x)}. \tag{2}$$

Es soll nun (2) für $x \in [0, 1]$ zu einem relativen Maximum gemacht werden.

Die *notwendige* Bedingung $d\triangle(x)/dx = 0$ liefert die Gleichung

$$3x^4 - 14x^3 + 24x^2 - 24x + 8 = 0. \tag{3}$$

Die in [0,1] gelegene Nullstelle von (3) berechnet sich nach einem Näherungsverfahren auf vier Dezimalen genau zu

$$\underline{x = 0{,}5506.} \tag{4}$$

Die *hinreichende* Bedingung ergibt die Gleichung

$$\frac{d^2\triangle(x)}{dx^2} = \frac{3x^4 - 19x^3 + 42x^2 - 36x + 16}{(x-2)^3},$$

für den Wert (4) also ersichtlich negativ. Damit ist die Aufgabe gelöst.

Nach (2) errechnet sich schliesslich die «überschiessende» Fläche zu

$$\underline{\triangle = 0{,}274,}$$

das heisst also: 27,4% der Gesamtfläche stehen über. H. WAGNER, Karlsruhe.

Weitere Lösungen sandten L. BERNSTEIN (Tel-Aviv) und L. KIEFFER (Luxemburg).

Aufgabe 212. Lässt sich ein Dreieck mit Zirkel und Lineal konstruieren, wenn gegeben sind: 1. Der Winkel γ, 2. der Ankreisradius ϱ_a, 3. die Summe aus der Seite a und der halben Seite b? H. LENZ, München.

Lösung: Von dem Dreieck kann der Winkel $\gamma = \sphericalangle ACB$ und der die Geraden $g_a = BC$ und $g_b = AC$ berührende Ankreis k_a sofort konstruiert werden. Man trägt nun auf g_a von C aus auf der den Berührungspunkt mit k_a enthaltenden Seite die Strecke $\overline{CK} = a + (b/2)$ ab und wählt weiter auf g_a zwischen C und K einen beliebigen Punkt X, wobei $\overline{CX} = a$ und $\overline{KX} = b/2$ gesetzt wird. Wird nun auf g_b von C aus auf der den Berührungspunkt mit k_a nicht enthaltenden Seite die Strecke $\overline{CX'} = 2\,\overline{KX} = b$ abgetragen, dann entstehen auf g_a und g_b ähnliche Punktreihen, $g_a(X)$ und $g_b(X')$, deren Erzeugnis eine Parabel ist. Die Parabeltangenten bilden zusammen mit g_a und g_b Dreiecke mit dem festen Winkel γ und der konstanten Summe $a + (b/2)$. Unter ihnen sind nun jene auszusondern, für die k_a Ankreis ist, das heisst, es sind die vier gemeinsamen Tangenten der Parabel und des Kreises zu bestimmen. Da zwei gemeinsame Tangenten, nämlich g_a und g_b, schon bekannt sind, ist dies eine quadratische Aufgabe, die mit Zirkel und Lineal gelöst werden kann.

Zur konstruktiven Durchführung kann man etwa aus den Punkten X auf g_a die Tangenten an k_a legen und diese mit g_b zum Schnitt bringen. Die so auf g_b entstehende Punktreihe $g_b(X'')$ ist projektiv zu $g_a(X)$, und man erhält also projektive Punktreihen $g_b(X')$ und $g_b(X'')$ auf demselben Träger g_b. Die mit der Konstruktion von Steiner zu bestimmenden Doppelpunkte sind dann die gesuchten Eckpunkte A unseres Dreiecks. Es ist jedoch nur einer von ihnen brauchbar, für den andern ist k_a der Inkreis und γ Aussenwinkel. Bemerkungen: 1. Die Aufgabe hat nur dann eine Lösung, wenn

$$a + \frac{b}{2} > \varrho_a \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

2. Offenbar ändert sich am Lösungsweg nichts, wenn man $a + (b/2)$ durch $a + k\,b$ (k rational, > 0) ersetzt. E. MANHARDT, Wien, J. SCHOPP, Budapest.

Weitere Lösungen sandten R. LAUFFER (Graz), E. ROTHMUND (Zürich) (rechnerische Lösung), R. SPRANCK (Luxemburg), J. STROMMER (Budapest).

Aufgabe 213. Man bestimme alle Nullstellen des Polynoms

$$A\,x^{p+q} - B\,x^p + B - A \quad (0 < A < B),$$

welche auf dem Einheitskreis liegen. K. PRACHAR, Wien.

Lösung des Aufgabenstellers: Man fasse die drei Glieder des Polynoms als Vektoren in der komplexen Ebene auf. Nach der Dreiecksungleichung gilt für $|x| = 1$

$$|B x^p| \leqq |A x^{p+q}| + |B - A|.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur bei gleicher Richtung der Vektoren, das heisst für $x^{p+q} = x^p = 1$. Ist $d = (p, q)$, so sind also die gesuchten Nullstellen genau die d-ten Einheitswurzeln.

Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring, Dänemark), J. BERKES (Szeged, Ungarn), L. BERNSTEIN (Tel-Aviv), R. LAUFFER (Graz), E. METZLER (Bern).

Aufgabe 214. Gegeben ist ein Kreis K_0 und eine Gerade g. Gesucht wird der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines Kreises K, der K_0 so berührt, dass ein Ähnlichkeitspunkt von K und K_0 auf g liegt. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht.

Lösung: Der Mittelpunkt O des Kreises K_0 mit dem Radius R sei der Ursprung eines Polarkoordinatensystems, dessen Achse senkrecht zu g im Abstand d von O verlaufe. M sei der Mittelpunkt eines K_0 im Punkte T berührenden Kreises und D der Schnittpunkt der gemeinsamen *äusseren* Tangenten (2. Ähnlichkeitspunkt). Hat M die Polarkoordinaten r, φ, und liegt D auf g, so gilt $\overline{OD} = d/\cos\varphi$, $\overline{OT} = R$, $\overline{OM} = r$. Die Punkte T und D teilen die Strecke $\overline{OM}$ harmonisch. $\overline{OM}$ ist also das harmonische Mittel von $\overline{OT}$ und $\overline{OD}$, das heisst

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{\cos\varphi}{d}\right).$$

Hieraus folgt die Polargleichung

$$r = \frac{2R}{1 + \varepsilon\cos\varphi}, \qquad \varepsilon = \frac{R}{d}.$$

Der gesuchte Ort ist also ein Kegelschnitt mit O als Brennpunkt und der numerischen Exzentrizität R/d. Man erhält eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel, je nachdem $R < d$, $R = d$ oder $R > d$. L. KIEFFER, Luxemburg.

K. GRÜN (Steyr) und J. SCHOPP (Budapest) betrachten K_0 als zyklographisches Bild eines Raumpunktes P, der über dem Punkt O im Abstand R von der Bildebene π liegt. Der Spurpunkt der Geraden durch zwei Raumpunkte ist Ähnlichkeitspunkt ihrer Bildkreise. Der geometrische Ort der Raumpunkte, deren Bildkreise mit K_0 einen auf g liegenden Ähnlichkeitspunkt gemeinsam haben, ist die durch P und g bestimmte Ebene E. Anderseits bilden die sämtlichen K_0 berührenden Kreisen entsprechenden Raumpunkte zwei zu π symmetrische Doppelkegel K und K^*, für die K_0 Leitkreis ist, während die Spitzen P und P^* zu π symmetrisch liegen. Die Projektion auf π des durch E und K^* bzw. K bestimmten Kegelschnitts ergibt den gesuchten geometrischen Ort. Zu diesem müssen auch die Verbindungsgeraden von O mit den Schnittpunkten von K_0 und g gerechnet werden.

Wie W. LÜSSY (Winterthur) mitteilt, ist die zweite Hüllkurve der Kreise K ebenfalls ein Kreis. Die zur Schar K konzentrischen Kreise durch den Mittelpunkt von K_0 hüllen nämlich den Leitkreis des Kegelschnitts ein, der in der Aufgabe gesucht ist. Die zweite Hüllkurve der Schar K ist eine der Parallelkurven zu diesem Kreis mit dem Radius von K_0 als Abstand.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), J. BERKES (Szeged), R. LAUFFER (Graz).

Aufgabe 215. A, B, C sont les sommets d'un triangle donné; M un point de son plan; A', B', C' les sommets respectifs du triangle pédal qui correspond à M. On demande le lieu des points M pour lesquels les sens définis par ABC et $A'B'C'$ sont contraires et

$$\text{Aire}\,(A'B'C') = -2\,\text{Aire}\,(ABC).$$

G. N. VLAHAVAS, London.

Lösung: Dass der geometrische Ort von M ein zum Umkreis des Dreiecks ABC konzentrischer Kreis ist, kann man leicht in folgender Weise einsehen: Sind d_1, d_2, d_3 die Abstände des Punktes M von den Seiten des Dreiecks ABC und F' die Fläche des Fusspunktdreiecks, so gilt eine Gleichung von der Form

$$a_1 d_2 d_3 + a_2 d_3 d_1 + a_3 d_1 d_2 = F', \qquad (1)$$

wo die a_i konstant sind. Da die d_i lineare Funktionen der Koordinaten x, y von M sind, ist (1) eine in x, y quadratische Gleichung, in der nur das Absolutglied von F' abhängt. Für $F' = 0$ (Wallacesche Gerade) stellt diese Gleichung den Umkreis des Dreiecks ABC dar (Radius r_0), also für beliebiges F' einen dazu konzentrischen Kreis (Radius r). r^2 hängt nach (1) linear von F' ab. Weil $r = 0$ zu $F' = F/4$ gehört (F = Fläche des Dreiecks ABC) und $r = r_0$ zu $F' = 0$, so gilt

$$r^2 = r_0^2\left(1 - 4\frac{F'}{F}\right). \qquad (2)$$

Für $F' = -2F$ wird $r = 3r_0$. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht.

Dass der gesuchte Ort ein zum Umkreis konzentrischer Kreis ist, ist in der Aufgabe Nr. 166 enthalten. Die in der Lösung[1]) ohne Beweis angegebene Beziehung zwischen F und F' ist mit der obigen Formel (2) identisch.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), R. LAUFFER (Graz), J. SCHOPP (Budapest).

Neue Aufgaben

243. Es werden n unabhängige Versuche gemacht. Bei jedem Versuch sind drei Ausgänge 1, 2, 3 möglich mit Wahrscheinlichkeiten p, q und r. Natürlich ist $p + q + r = 1$. Insgesamt sei der erste Ausgang x-mal, der zweite y-mal und der dritte z-mal vorgekommen ($x + y + z = n$). Was ist der Erwartungswert von xy?
B. L. VAN DER WAERDEN, Zürich.

244. Man bestimme auf einem Hyperboloid, von dem ein Hauptschnitt eine gleichseitige Hyperbel ist, die Ortskurve der Punkte verschwindender mittlerer Krümmung. H. BRAUNER, Wien.

245. Es seien $r_1, r_2, \ldots, r_n$ nichtnegative Zahlen, und es werde

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + r_i} = P, \qquad \frac{n}{1 + (r_1 r_2 \ldots r_n)^{1/n}} = Q$$

gesetzt. Zeige, dass

$$P \geqq Q, \quad \text{wenn alle } r_i \geqq 1, \qquad (1)$$

$$P \leqq Q, \quad \text{wenn alle } r_i \leqq 1, \qquad (2)$$

und dass Gleichheit in beiden Fällen nur eintritt, wenn alle r_i gleich sind.
P. HENRICI, Washington, D.C. (USA).

246. Trouver tous les nombres naturels n pour lesquels n est divisible par $\varphi(n)$, où $\varphi(n)$ est le nombre de nombres naturels premiers avec n et ne dépassant pas n. [On ne sait pas, s'il existe des nombres composés n pour lesquels $n - 1$ est divisible par $\varphi(n)$.] A. SCHINZEL, Varsovie.

247. Man zeige, ohne von Tafeln Gebrauch zu machen, dass das Gleichungssystem

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4\cos 10^\circ}, \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{6}}{4\cos 10^\circ}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{2\cos 10^\circ}$$

ein Lösungstripel besitzt, das aus den Winkeln eines Dreiecks besteht[2]).
A. BAGER, Hjørring.

---

[1]) El. Math. *8*, 140 (1953).

[2]) Der Verfasser stellte die Aufgabe in einem aus fünf Problemen bestehenden Preisausschreiben für dänische Gymnasiasten.

248. Man beweise: Jede der beiden Beziehungen

$$\varrho^i + \varrho_a^i + \varrho_b^i + \varrho_c^i = a^i + b^i + c^i \quad (i = 1, 2)$$

stellt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür dar, dass das Dreieck mit den Seiten a, b, c, dem Inkreisradius ϱ und den Ankreisradien $\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$ rechtwinklig ist[1]).

E. TROST, Zürich.

Berichtigung zu Nr. 236: Auf der rechten Seite der Gleichung muss $+1/2$ hinzugefügt werden.

Literaturüberschau

ERWIN LOHR: *Mechanik der Festkörper*

483 Seiten mit 73 Abbildungen, Walter de Gruyter & Co., Berlin 1952

Das ausserordentlich inhaltsreiche Werk gibt eine vorzügliche Darstellung der gesamten Mechanik (Punktdynamik, Statik und Dynamik starrer Systeme, Mechanik deformierbarer Körper) auf Grund der vektoriellen Formulierung der Gesetze. In seiner Art stellt es ein ausgezeichnetes Mittel dar, sich in die vektorielle Schreibweise einzuarbeiten, beginnend mit den einfachsten Gesetzen der Dynamik bis zu den anspruchsvollen Formulierungen der Mechanik deformierbarer Medien. In Fussnoten sind ausserdem die Formulierungen in der Dyaden-Rechnung und zahlreiche schwierigere Teilprobleme behandelt. Ein kurzes Schlusskapitel der Dynamik behandelt die höheren Prinzipien der Systemsmechanik bis und mit der Integration der Hamilton-Jakobischen Differentialgleichung.

Ganz besonders reizvoll ist im zweiten Teil die Mechanik deformierbarer Medien ausgestaltet, die in drei Kapiteln eine strenge Herleitung der Spannungs- und Deformationstensoren elastischer Medien bietet und anschliessend die heutigen Begriffsbildungen der Theorie der plastischen Körper auf Grund der Gittertheorie fester Körper entwikkelt. Die Abschnitte über Hookesche Dehnung und Querkontraktion lesen sich ebenso flüssig wie die Biegungstheorie elastischer Balken. Die nunmehr folgenden Kapitel über Schwingungen und Wellen in elastischen Systemen stellen ganz erhebliche mathematische Anforderungen. Sie zeigen den Weg zur Ermittlung der partiellen Differentialgleichungen dieser Prozesse und die Art der Erfassung der Eigenfunktionen und Eigenwerte bei Schwingungs- und Wellenproblemen. Die Betrachtungen führen naturgemäss zu den verschiedenen Wellentypen in elastischen Körpern und zur Unterscheidung der Begriffe Gruppen- und Phasengeschwindigkeit. Ebenso bemerkenswert und eindrucksvoll ist die klare Fassung der Probleme der Membran- und Plattenschwingungen sowie der keineswegs einfachen Probleme der Wellen in dreidimensionalen Festkörpern, die in der Diskussion der Eigenschaften der Erdbebenwellen gipfeln. Abschliessend bilden Stossprobleme unter Berücksichtigung von Reibung und nicht zentralen Stossachsen Gegenstand eingehender Untersuchung.

Das Buch stellt für Ingenieure und Physiker eine reichhaltige Fundgrube feinerer Problembearbeitungen dar und darf jedem Freund exakter Forschung warm empfohlen werden.

Wenn ein Wort der Kritik erlaubt ist, so hat der Referent an drei Punkten etwas Anstoss genommen:

1. Es ist schade, dass Seite 53 in Anmerkung k) das spezifische Gewicht als Verhältniszahl definiert wird, während es schon sprachlich als Gewicht der Volumeneinheit ins Bewusstsein eingeht, auch wohl heute in weitesten Kreisen so eingeführt ist.

[1]) Für $i = 1$ findet man einen Beweis in Math. Gaz. *39*, 56 (1955), Note 2491.