Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **9 (1954)**

Heft 3

PDF erstellt am: **19.04.2024**

Mit wachsendem x nimmt dV/dL monoton ab. Also ist die Kurve *von unten konkav* und liegt deshalb ganz nicht unter dem Kurvenzug CEC' (Figur 4). Das Verfahren lässt sich beliebig oft wiederholen, so dass die Körper der Teilklassen $\mathrm{I}_3, \mathrm{I}_4, \ldots, \mathrm{I}_n$ nicht extremal sein können. Um in der Teilklasse II entsprechend operieren zu können, müssen wir zeigen, dass der Doppelkegelstumpf II_2 nicht extremal ist. Dies ist aber leicht. Durch *partielle Antisymmetrisation*[1]) wird er nämlich in einen Doppelkegelstumpf I_2 übergeführt, der gleiches Volumen, aber grösseres L aufweist, so dass er für das Extremum tatsächlich ausfällt. Wie im ersten Beispiel lässt sich der Beweis jetzt mühelos zu Ende führen[2]).

H. Bieri, Bern.

Ein Vorschlag zur Logarithmentafel

Alle dekadisch geschriebenen Zahlen vom Rang Null nenne ich dekadische Stammzahlen. Stammzahlen seien angedeutet durch N_0, Zahlen vom Rang r seien angedeutet durch N_r. Jede Zahl vom Rang r lässt sich zerlegen in das Produkt aus ihrer Stammzahl und der Potenz 10^r. Der dekadische Logarithmus der Stammzahl N_0 heisst Mantisse aller Numeri N_r, die zu dieser Stammzahl gehören. Der dekadische Logarithmus einer Zahl N_r setzt sich additiv zusammen aus seiner Mantisse und der Kennziffer. Die Kennziffer des Logarithmus einer Zahl N_r ist dabei identisch mit dem Rang r.

Praktische Kennzifferregel

1. Betrachte einen Numerus N_r: Die Anzahl der Stellen, um die das Komma verschoben werden muss, damit die Stammzahl erreicht wird, ist die Kennziffer des Logarithmus.
2. Die Kennziffer ist positiv, wenn der Numerus grösser ist als seine Stammzahl.
3. Die Kennziffer ist Null für alle Stammzahlen.
4. Die Kennziffer ist negativ, wenn der Numerus kleiner ist als seine Stammzahl.

Es wäre zweifellos ein Vorteil, wenn die Logarithmentafel so eingerichtet wäre, dass man von diesen durchsichtigen Kennzifferregeln Gebrauch machen könnte. Es müssten dazu im Rand der Logarithmentafel effektiv die Stammzahlen von 1,000 bis 9,999 stehen, und es müsste der Vordruck der Mantisse, die ja aus drucktechnischen Gründen in Vordruck und Hauptdruck zerlegt ist, effektiv mit 0,... geschrieben werden.

Muster:	num $L_0 = N_0$	$L_0 = \log N_0 = \text{mant}\, N_r$ für alle r										
			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	6,77	0,83					085					

H. Holliger, Zürich.

Aufgaben

Aufgabe 178. In einer Urne befinden sich a_1 Zettel mit der Nummer 1, a_2 Zettel mit Nummer 2, ..., a_k Zettel mit dem Aufdruck k. Ein Zettel wird gezogen. Enthält derselbe die Nummer 1, so wird er in die Urne zurückgelegt. Enthält aber der Zettel den Aufdruck $b \neq 1$, so wird dafür ein Zettel mit der Nummer $b - 1$ in die Urne gelegt. Diese Operation wird n-mal ausgeführt. Wie gross ist alsdann die Wahrscheinlichkeit, einen Zettel mit der Zahl 1 zu ziehen?

P. Buchner, Basel.

[1]) Nur der untere Kegelstumpf wird deformiert, und zwar so, dass sein Volumen unverändert bleibt.

[2]) Die Extremalkörper des vorliegenden Problems sind auch Extremalen im $(l; F, V)$-Problem!

Lösung: Bezeichnet man diese Wahrscheinlichkeit mit W_n, die Summe $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ mit A und vereinbart weiter, dass $a_r = 0$ für $r > k$, so erhält man auf Grund einfacher kombinatorischer Überlegungen der Reihe nach

$$\begin{aligned}
A W_0 &= a_1, \\
A^2 W_1 &= a_1 A + a_2, \\
A^3 W_2 &= a_1 A^2 + 2 a_2 A + (a_3 - a_2), \\
A^4 W_3 &= a_1 A^3 + 3 a_2 A^2 + 3 (a_3 - a_2) A + (a_4 - 2 a_3 + a_2), \\
A^5 W_4 &= a_1 A^4 + 4 a_2 A^3 + 6 (a_3 - a_2) A^2 + 4 (a_4 - 2 a_3 + a_2) A + (a_5 - 3 a_4 + 3 a_3 - a_2) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Allgemein gilt die Rekursionsformel

$$A^{n+2} W_{n+1} = A (A^{n+1} W_n) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} \sum_{m=2}^{k+2} (-1)^{k-m+2} \binom{k}{k-m+2} a_m.$$

Somit erhält man für ein beliebiges n

$$A^{n+1} W_n = a_1 A^n + \sum_{k=1}^{n} \left\{ \binom{n}{k} A^{n-k} \sum_{m=2}^{k+1} (-1)^{k-m+1} \binom{k-1}{k-m+1} a_m \right\}.$$

A. UNTERBERGER, Bludenz.

Der Aufgabensteller gibt in Verallgemeinerung eines von I. V. USPENSKY[1]) gefundenen Resultats folgenden Ausdruck für W_n

$$W_n = 1 - \sum_{r=1}^{k-1} \frac{a_{r+1} + a_{r+2} + \cdots + a_k}{A^r} \left(1 - \frac{1}{A}\right)^{n-r+1} \binom{n}{r-1}.$$

Aufgabe 179. Man gebe in expliziter Form zwei Klassen von Lösungen des Kongruenzensystems

$$x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{y}, \qquad y^2 + 1 \equiv 0 \pmod{x};$$

eine für ungerade x, y und eine für gerades x und ungerades y. L. BERNSTEIN, Tel Aviv.

Lösung: u_n bezeichne das n-te Element der Folge der Fibonaccischen Zahlen 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., die durch die Rekursionsformel $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ bestimmt sind. Für $n > r$ gilt die Formel

$$u_n^2 = u_{n-r} u_{n+r} + (-1)^{n-r} u_r^2 \text{ [2])}.$$

Setzt man hier $n = 2m \pm 1$, $r = 2$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
u_{2m+1}^2 &= u_{2m-1} u_{2m+3} - 1, & u_{2m+1}^2 + 1 &\equiv 0 \pmod{u_{2m-1}}, \\
u_{2m-1}^2 &= u_{2m-3} u_{2m+1} - 1, & u_{2m-1}^2 + 1 &\equiv 0 \pmod{u_{2m+1}}.
\end{aligned}$$

Durch $(x, y) = (u_{2m-1}, u_{2m+1})$, $m = 1, 2, \ldots$, ist also eine Klasse von Lösungen des gegebenen Kongruenzensystems bestimmt. Aus $u_1 \equiv u_2 \equiv 1 \pmod 2$ folgt durch vollständige Induktion $u_{3n} \equiv 0 \pmod 2$, $u_{3n \pm 1} \equiv 1 \pmod 2$. Deshalb geben $(x, y) = (u_{6m-1}, u_{6m+1})$ eine Lösungsklasse mit ungeraden x, y, und $(x, y) = (u_{6m+1}, u_{6m+3})$ ist eine Lösungsklasse mit ungeradem x und geradem y. A. BAGER, Hjørring (Dänemark).

---

[1]) I. V. USPENSKY, *Introduction to Mathematical Probability* (McGraw-Hill Book Company, New York 1937), S. 179.

[2]) Von der Richtigkeit dieser Formel überzeugt man sich leicht mittels der Beziehungen

$$u_n = \frac{1}{2^n \sqrt{5}} (a^n - b^n), \quad a = 1 + \sqrt{5}, \quad b = 1 - \sqrt{5}, \quad a b = -4.$$

(*Die Redaktion*)

Aufgabe 180. Zeige, dass neben dem bekannten Satz von WALLIS (1616–1703)

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2k)^2}\right)=\frac{2}{\pi}$$

auch gilt

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2k+1)^2}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

B. VAN DER POL, Genf.

1. Lösung: Die beiden Produkte der Aufgabe sind konvergent. Schreiben wir das erste in der Form

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdots=\frac{\pi}{2}, \tag{1}$$

so ergibt sich sofort

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdots=\frac{\pi}{4}.$$

Durch Zusammenfassen von je zwei Faktoren erhält man

$$\frac{\pi}{4}=\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdots=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right),$$

was zu beweisen war. Aus (1) ergibt sich als Korollar

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{4n^2-1}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

M. G. BEUMER, Bergen op Zoom (Holland).

2. Lösung: Durch Multiplikation der beiden konvergenten unendlichen Produkte erhält man

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2k)^2}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2k+1)^2}\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)(2k+2)}{2k(2k+1)}=\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\frac{2k+2}{2k+1}=\frac{1}{2},$$

woraus sich der gesuchte Wert sofort ergibt. K. RIEDER, Riehen.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), F. GOLDNER (London), W. KLEPPER (Karlsruhe), R. LAUFFER (Graz), E. ROTHMUND (Zürich), A. UNTERBERGER (Bludenz), H. WAGNER (Karlsruhe).

Aufgabe 181. Démontrer pour x naturels >1 la formule

$$\pi(x)=1+\sum_{n=3}^{x}\left\{1-\lim_{m=\infty}\left[1-\prod_{k=2}^{n-1}\left(\sin\frac{n\pi}{k}\right)^2\right]^m\right\}$$

[$\pi(x)$ est le nombre des nombres premiers inférieurs ou égaux à x].

W. SIERPIŃSKI, Varsovie.

Lösung: Ist n keine Primzahl, dann gibt es ein k ($n>k\geqq 2$), welches echter Teiler von n ist. Für zusammengesetztes n gilt daher

$$\prod_{k=2}^{n-1}\sin\frac{n\pi}{k}=0.$$

Ist dagegen n Primzahl ($n\geqq 3$), so sind alle Faktoren des Produkts von Null verschieden, und man hat

$$0\leqq 1-\prod_{k=2}^{n-1}\left(\sin\frac{n\pi}{k}\right)^2<1.$$

Hieraus folgt

$$1 - \lim_{m\to\infty}\left[1 - \prod_{k=2}^{n-1}\left(\sin\frac{n\pi}{k}\right)^2\right]^m = \begin{cases}1, & \text{wenn } n \text{ prim,}\\ 0, & \text{wenn } n \text{ zusammengesetzt.}\end{cases}$$

Die von $n = 3$ an erstreckte Summe dieser Ausdrücke ist somit gleich der Anzahl der Primzahlen p mit $3 \leqq p \leqq x$. Da die Primzahl 2 noch zu berücksichtigen ist, ist $\pi(x)$ gleich der um 1 vermehrten Summe. R. LAUFFER, Graz.

Dieselbe Lösung sandte A. BAGER (Hjørring).

Aufgabe 182. Les plus petits restes positifs qu'on obtient en divisant les termes de la suite

$$a, \quad (a+v)\,r, \quad (a+2v)\,r^2, \quad \ldots$$

par le nombre premier p, forment une suite périodique. Démontrer que si r est une racine primitive de la congruence de FERMAT $x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, et v n'est pas un multiple de p, la plus petite période est $p\,(p-1)$. H. BREMEKAMP, Delft.

Solution de l'auteur: Les restes des termes de la progression arithmétique a, $a+v$, $a+2v, \ldots$, sont périodiques à période p. Les restes des termes de la progression géométrique $1, r, r^2, \ldots$ sont périodiques à période $p-1$. La suite considérée a donc bien la période $p\,(p-1)$. Il reste à démontrer qu'il n'y a pas de période plus petite. Si q est une période, on a

$$a \equiv (a + q\,v)\,r^q \pmod{p},$$

$$(a+v)\,r \equiv [a + (q+1)\,v]\,r^{q+1} \pmod{p},$$

d'où, parce que $r \not\equiv 0 \pmod{p}$,

$$v \equiv v\,r^q \pmod{p}, \qquad 1 \equiv r^q \pmod{p},$$

parce que $v \not\equiv 0 \pmod{p}$. Donc q est divisible par $p-1$, r étant racine primitive. La première des congruences ci-dessus donne alors

$$a \equiv a + q\,v \pmod{p},$$

donc q est divisible par p. La plus petite période est donc $p\,(p-1)$.

Si r est une racine de la congruence de FERMAT à période p_1, la plus petite période de notre suite est $p\,p_1$. Au lieu de la progression arithmétique a, $a+v$, $a+2v, \ldots$ on aurait pu prendre une progression arithmétique d'ordre n, $P_n(0)$, $P_n(1)$, $P_n(2), \ldots$. Quand on prend au lieu de p un nombre divisible m, les énoncés deviennent un peu plus compliqués, parce que la congruence d'EULER $x^{\varphi(m)} - 1 \equiv 0 \pmod{m}$ n'a pas, en général, de racine primitive.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring) und M. G. BEUMER (Bergen op Zoom).

Aufgabe 183. Gegeben sind drei konzentrische Kreise k_1, k_2, k_3 mit den Radien $r_1 = 1$, $r_2 = \sqrt{2}$, $r_3 = \sqrt{3}$. Man wähle auf jedem der drei Kreise k_j je einen Punkt P_j derart, dass ein Dreieck mit maximaler Fläche entsteht. Man zeige ausserdem, dass (für beliebige Radienverhältnisse) die gemeinsame Kreismitte stets Höhenschnittpunkt aller Dreiecke mit maximaler Fläche ist. R. BEREIS, Wien.

Lösung: Die Ecken des Dreiecks seien Punkte der Gaußschen Zahlenebene: $P_1 = r_1$, $P_2 = r_2\,e^{i\varphi}$, $P_3 = r_3\,e^{i\psi}$. Die Fläche wird maximal, wenn die Funktion

$$f(\varphi;\psi) = \begin{vmatrix} r_1 & 0 & 1\\ r_2\cos\varphi & r_2\sin\varphi & 1\\ r_3\cos\psi & r_3\sin\psi & 1\end{vmatrix} = r_1 r_2 \sin\varphi - r_1 r_3 \sin\psi + r_2 r_3 \sin(\psi - \varphi)$$

ein Maximum hat. Notwendige Bedingung hierfür ist

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \varphi} &= r_1 r_2 \cos\varphi - r_2 r_3 \cos(\psi - \varphi) = 0,\\ \frac{\partial f}{\partial \psi} &= -r_1 r_3 \cos\psi + r_2 r_3 \cos(\psi - \varphi) = 0.\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Hieraus folgt

$$r_2 \cos\varphi = r_3 \cos\psi,$$

was besagt, dass die Strecke P_2P_3 senkrecht auf OP_1 steht. Durch zyklische Vertauschung ergibt sich die notwendige Bedingung für ein Maximum, dass O Höhenschnittpunkt des Dreiecks $P_1P_2P_3$ sein muss.

Die Berechnung irgendeines Stücks, dessen Kenntnis die Konstruktion eines Dreiecks aus den drei Höhenabschnitten r_1, r_2 und r_3 gestatten würde, führt auf eine im allgemeinen irreduzible kubische Gleichung, auch für das Radienverhältnis $1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$. Hingegen lassen sich in diesem Falle die Stücke explizit angeben. Aus (1) folgt zum Beispiel

$$2\, r_1 r_2 \cos^3\varphi - (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) \cos^2\varphi + r_3^2 = 0,$$

und daraus ergibt sich im Spezialfall

$$\cos\varphi = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \cos 20^\circ\right),$$

und weiter etwa die Seite P_1P_2

$$c = \sqrt{1 + 4\cos 20^\circ}$$

oder der Durchmesser des Umkreises

$$d = 2\sqrt{2}\cos 10^\circ.$$

Das Dreieck lässt sich mit Zirkel und Lineal nicht konstruieren.

WILLI LÜSSY, Winterthur.

J. SCHOPP (Budapest) bemerkt, dass sich die Aufgabe auf vier konzentrische Kugeln (für beliebige Radienverhältnisse) erweitern lässt. Das Tetraeder mit maximalem Inhalt, dessen Eckpunkte je auf einer der Kugeln liegen, ist orthozentrisch mit dem gemeinsamen Kugelmittelpunkt als Orthozentrum.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), M. G. BEUMER (Bergen op Zoom), R. JAKOBI (Braunschweig), L. KIEFFER (Luxemburg), E. PLÜSS (Riken), E. ROTHMUND (Zürich), A. SCHWARZ (Seuzach), J. STROMMER (Budapest), A. UNTERBERGER (Bludenz), H. WAGNER (Karlsruhe).

Neue Aufgaben

209. Die Diophantische Gleichung

$$y^2 = 4\,x^3 - 4\,x^2 + 1$$

ist in rationalen Zahlen vollständig zu lösen. R. LAUFFER, Graz.

210. What are the upper and lower bounds of the series

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k$$

for all integers n? C. R. PERISHO, Lincoln, Nebr., U.S.A.

211. Ein quadratisches Papier werde so gefaltet, dass eine Ecke auf eine der beiden nicht von dieser Ecke ausgehenden Seiten zu liegen kommt. Durch das Falten entstehen drei «überschiessende» Dreiecke. Die Summe dieser Dreiecke soll zu einem Maximum gemacht werden. Wo liegt die abgebogene Ecke, und wieviel Prozent der Gesamtfläche machen die überschiessenden Flächen aus?

E. ROTHMUND, Zürich.

212. Lässt sich ein Dreieck mit Zirkel und Lineal konstruieren, wenn gegeben sind: 1. Der Winkel γ, 2. der Ankreisradius ϱ_a, 3. die Summe aus der Seite a und der halben Seite b? H. LENZ, München.

213. Man bestimme alle Nullstellen des Polynoms

$$A\,x^{p+q} - B\,x^{p} + B - A \quad (0 < A < B),$$

welche auf dem Einheitskreis liegen (Verallgemeinerung?). K. PRACHAR, Wien.

Berichtigung: In Aufgabe 205b ist «Zylinder» bzw. «Doppelkegel» zu ersetzen durch «Zylinder der Höhe h» bzw. «Doppelkegel der Höhe h».

Literaturüberschau

FRITZ MÜLLER: *Im Anfang war die Zahl*

Grundprobleme der Mathematik gemeinverständlich dargestellt

463 Seiten mit 211 Abbildungen, Büchergilde Gutenberg, Zürich 1953

Der Verfasser schildert den zentralen Programmpunkt seines Werkes, das er im Auftrag des Komitees der Wissenschaftlichen Bibliothek der Büchergilde Gutenberg schrieb, mit folgenden Worten:

«Das Buch soll *Interesse und Freude* an dem königlichen Fach erwecken oder bei jenem wiedererwecken, der der Mathematik der Schul- oder Studienzeit aus irgendwelchen Gründen längere Zeit fernbleiben musste. Ich denke dabei ebenso an Akademiker wie an mathematisch interessierte Berufsarbeiter, an Kaufleute und Techniker nicht minder als an Mittelschüler, Studenten und Lehrer. Wenn mir dabei vor allem meine jetzigen und früheren Hörer der *Zürcher Volkshochschulkurse* vorschweben, so liegt der Grund darin, dass vieles in diesem Buch unter dem frischen Eindruck der ‚mathematischen Nöte' dieser Kreise angeregt und dargestellt worden ist. Vor allem aber möchte ich jener falschen Furcht und Abneigung vor allem Mathematischen den Kampf ansagen. Wenn der Leser gewillt ist, einige Mühen auf sich zu nehmen, so glaube ich, ihm ein lohnendes Ziel versprechen zu dürfen.»

Der erste Teil: *Im Reich der Zahlen*, 239 Seiten umfassend, enthält folgende Kapitel: Vom Zählen – Unser bescheidenes Zahlenvorstellungsvermögen – Die Zahlwörter – Zahlensysteme – Die Zahlenschrift – Blick in das heutige Zahlengebäude – Über Rechenmethoden, Rechenkunst und Rechenpraxis – Berühmte Zahlen, berühmte Probleme – Die unendlichen Reihen – Die Zahl in Natur und Kunst.

Der zweite, 28 Seiten umfassende Teil: *Die Gleichung*, bringt in drei Abschnitten einige algebraische Betrachtungen: Gleichheit, Gleichung und Ungleichung – Von den Gleichungen höheren Grades – Unvollständige und nichtalgebraische Gleichungen.

Der dritte Teil: *Die Funktion*, erläutert in sechs Kapiteln (164 Seiten) Grundbegriffe der Analysis: Empirische Funktionen und ihre Darstellung – Die mathematische Funktion – Funktion und Gleichung – Nähere Untersuchung einer Funktionskurve – Die Differentialrechnung – Ausblick in die Integralrechnung.

Der Verfasser schrieb sein Buch mit schönem Enthusiasmus. Er verfügt über die Gabe, das Interessante an den behandelten Problemen ins Licht zu rücken. Die lebendige Art der Darstellung und eine erquickend flüssige Sprache ermöglichen leichte Lesbarkeit. Anregende Zwischenbemerkungen, historische Einzelheiten (besonders im ersten Teil), Beispiele interessanter physikalischer Anwendungen, klare Figuren, des Verfassers ausgeprägter Spürsinn dafür, wie weit man bezüglich mathematischer Strenge für einen grösseren Leserkreis gehen darf, und schliesslich auch die gediegene äussere Ausstattung sind die Vorzüge, die dem Werke den verdienten Erfolg sichern werden.

L. Locher-Ernst.