

# Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **8 (1953)**

Heft 6

PDF erstellt am: **25.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

In H. WEBER und J. WELLSTEIN, *Encyclopädie der Elementar-Mathematik*, Bd. I, S. 264: «Die erste Erwähnung dieses Satzes findet sich in WARINGS *Meditationes algebraicae*, deren erste Auflage 1770 (?) erschien: ‚Hanc maxime elegantem numerorum primorum proprietatem invenit vir clarissimus, rerumque mathematicarum peritissimus Ioannes Wilson Armiger.‘ Dieser IOANNES WILSON ARMIGER ist ohne Zweifel identisch mit Sir JOHN WILSON, der 1741–1793 lebte, von dem es in der *National Biography*, LXII, 107 (London 1900) heisst: ‘While still an undergraduate he is said to have made an able reply to the attack on EDWARD WARING’S *Miscellanea analytica* by WILLIAM POWELL’».

Es ist hier unwesentlich, ob die erste Auflage der Arbeit WARINGS 1762 oder 1770 erschienen ist. Wichtig ist, dass er diesen WILSON gekannt haben muss: Er nennt ihn ja einen «vir clarissimus». Die obenerwähnte *National Biography* behauptet, dass WILSON schon als «undergraduate», das heisst als angehender Wissenschaftler, eine beachtenswerte Abhandlung geschrieben habe. Mit dieser Kenntnis versehen, können wir uns nicht länger dem von W. MANTEL geäusserten Zweifel, ob WILSON tatsächlich gelebt habe, anschliessen.

RENÉ FURNÉE, Zürich.

## Aufgaben

**Aufgabe 165.** Man beweise: Für  $(a, n) = 1$  ist

$$x \equiv a - 12 \sum_{k=1}^{n-1} k \left[ \frac{ka}{n} \right] \pmod{n}$$

Lösung der Kongruenz  $ax \equiv 1 \pmod{n}$ .

B. VAN DER POL, Genf.

*Lösung:* Wir setzen

$$ka = q_k n + r_k, \quad q_k = \left[ \frac{ka}{n} \right] \quad (1 \leq k \leq n-1). \tag{1}$$

Wegen  $(a, n) = 1$  ist  $a, 2a, \dots, (n-1)a$  ein vollständiges Restsystem mod  $n$ . Nach (1) ist  $r_k \equiv ka \pmod{n}$  und  $0 \leq r_k < n$ , also ist die Gesamtheit der Zahlen  $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$  identisch mit der Gesamtheit der Zahlen  $1, 2, \dots, n-1$ . Aus (1) folgt durch Quadrieren und Addition der entstehenden  $n-1$ -Gleichungen

$$a^2 \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = n^2 \sum_{k=1}^{n-1} q_k^2 + 2n \sum_{k=1}^{n-1} q_k r_k + \sum_{k=1}^{n-1} r_k^2.$$

Aus

$$\sum_{k=1}^{n-1} r_k^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1)$$

folgt weiter

$$6n \sum_{k=1}^{n-1} q_k^2 + 12 \sum_{k=1}^{n-1} q_k r_k = (n-1)(2n-1)(a^2-1).$$

Da

$$q_k = \left[ \frac{ka}{n} \right], \quad r_k \equiv ka \pmod{n}$$

ergibt sich schliesslich

$$12a \sum_{k=1}^{n-1} k \left[ \frac{ka}{n} \right] \equiv a^2 - 1 \pmod{n}$$

oder

$$a \left\{ a - 12 \sum_{k=1}^{n-1} k \left[ \frac{ka}{n} \right] \right\} \equiv 1, \pmod{n}$$

was zu beweisen war.

A. BAGER (Hjørring, Dänemark).

Eine weitere Lösung sandte F. GOLDNER (London).

**Aufgabe 166.** Von einem Punkte  $P$  in der Ebene eines Dreiecks  $(A_i)$  fälle man die Lote auf die Seiten des Dreiecks. Ihre Fusspunkte bilden ein Dreieck, dessen Fläche  $F$  eine Funktion von  $P$  ist. Man zeige:

a) Der geometrische Ort der Punkte  $P$ , deren Fusspunktdreiecke nach Grösse und Sinn gleiche Fläche haben, ist ein zum Umkreis von  $(A_i)$  konzentrischer Kreis.

b) Der geometrische Ort der Schwerpunkte der Fusspunktdreiecke gleicher Fläche ist eine Ellipse um den Schwerpunkt von  $(A_i)$  als Mittelpunkt.

c) Die Ellipsen von b) sind, als Funktion des Parameters  $F$ , homothetisch, und ihre Achsen sind parallel zu dem Achsenkreuz  $k(e)$ , welches nach Aufgabe 148.4 dem Dreieck  $(A_i)$  zugeordnet ist (Winkelhalbierende zwischen der an einer der Dreiecksseiten gespiegelten Euler-Geraden und der Verbindung des Umkreismittelpunktes mit der Gegenecke jener Seite).  
A. STOLL, Zürich.

*Lösung des Aufgabenstellers:* a) Die Koordinaten einer Ecke des Fusspunktdreiecks sind ganze lineare Funktionen der Koordinaten  $(u, v)$  von  $P$ . Die Fläche  $F$  ist daher eine quadratische Funktion von  $u$  und  $v$ . Ihre Niveaulinien sind somit homothetische Kegelschnitte. Da der Umkreis von  $(A_i)$  dazu gehört ( $F = 0$ ), so sind es mit diesem konzentrische Kreise.

b) Auch die Koordinaten  $(U, V)$  des Schwerpunktes eines Fusspunktdreiecks sind ganze lineare Funktionen von  $u$  und  $v$ . Den konzentrischen Kreisen entsprechen daher homothetische Ellipsen. Dem Umkreismittelpunkt entspricht der Schwerpunkt von  $(A_i)$ .

c) Dieser Punkt erfordert einige Rechnung. Man wähle die Koordinatenachsen parallel zu  $k(e)$ . Dann ist nach Aufgabe 148.4  $\sum a_i b_i = 0$ . Die Transformationsgleichungen von  $(u, v)$  auf  $(U, V)$  nehmen daher die Form an:  $U = a u + b$ ,  $V = c v + d$ . Daraus folgt die Behauptung.

Eine weitere Lösung sandte Herr J. LANGR (Prag). Er findet für die Fläche des Fusspunktdreiecks den Ausdruck

$$F = \frac{r^2 - d^2}{4 r^2} D.$$

Hier bedeutet  $r$  den Umkreisradius und  $D$  den Flächeninhalt von  $(A_i)$ , und  $d$  ist der Abstand von  $P$  vom Umkreismittelpunkt von  $(A_i)$ .

**Aufgabe 167.** Es sei  $k$  eine geschlossene Kurve mit stetiger Tangente und Krümmung. Auf der Normalen jedes Punktes  $P$  von  $k$  wird von  $P$  aus nach aussen das  $\lambda$ -fache des Krümmungsradius in  $P$  abgetragen. Es entsteht eine spezielle «begleitende» Kurve von  $k$ . Ist  $B$  die Fläche der begleitenden Kurve,  $K$  diejenige von  $k$  und  $E$  die Fläche der Evolute von  $k$ , so gilt die Formel

$$B = (\lambda + 1)^2 K + \lambda (\lambda + 2) E.$$

E. TROST, Zürich.

*Lösung:* 1. Die geschlossene ebene Kurve  $k$  sei in Parameterstellung vektoriell durch  $\vec{x}(t)$  gegeben [ $0 \leq t \leq T$ ,  $\vec{x}(0) = \vec{x}(T)$  usw.]. Es bezeichne:  $L$  die Länge von  $k$ ;  $s = s(t)$  die Bogenlänge von  $\vec{x}(0)$  bis  $\vec{x}(t)$ ;  $\vec{b}$  den Normalenvektor der orientierten Kurvenebene;  $\vec{t} = d\vec{x}/ds$  die Kurventangente;  $\vec{n}$  die Kurvennormale orientiert durch  $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$ ;  $d\vec{s}$  das gemischte Produkt  $(\vec{x}, d\vec{x}, \vec{b})/2$ ;  $J$  das Integral  $\oint d\vec{s}$ , erstreckt über einen Umlauf  $0 \leq t \leq T$ . Wenn  $k$  einfach geschlossen ist und für  $0 \leq t \leq T$  einmal in positivem Sinne durchlaufen wird, ist  $J > 0$  und gleich dem von  $k$  umschlossenen Flächeninhalt.

2. Die Krümmung  $\kappa$  von  $k$  sei  $> 0$ , also auch  $\rho = \kappa^{-1} > 0$  und endlich. Für beliebiges reelles  $c$  sei  $k_c$  die geschlossene Kurve  $\vec{x}_c = \vec{x} + c \rho \vec{n}$  (die « $c$ -Evolute» von  $k$ ). Es ist  $k_0 = k$  und  $k_1$  die Evolute von  $k$ . Für  $c > 0$  entsteht  $k_c$  durch Abtragen von  $c \rho$  auf der innern, für  $c < 0$  auf der äussern Normalen von  $k$ . Für den Umlauf  $0 \leq t \leq T$  von  $k_c$  berechnen wir das wie oben erklärte Integral  $J_c = \oint d\vec{s}_c$  von  $k_c$ : Unter Beachtung von

$$d\vec{x} = \vec{t} ds, \quad d\vec{t} = \kappa \vec{n} ds, \quad d\vec{n} = -\kappa d\vec{x}, \quad \vec{x} \vec{n} ds = -(\vec{x}, d\vec{x}, \vec{b}),$$

$$d(\vec{x} \vec{t}) = ds + \kappa ds \vec{x} \vec{n} = ds - \kappa(\vec{x}, d\vec{x}, \vec{b})$$

erhält man

$$\begin{aligned} d\mathfrak{s}_c &= \frac{1}{2} (\vec{x} + c \varrho \vec{n}, (1-c) d\vec{x} + c d\varrho \vec{n}, \vec{b}) \\ &= \frac{1-c}{2} (\vec{x}, d\vec{x}, \vec{b}) + \frac{c-c^2}{2} \varrho (\vec{n}, d\vec{x}, \vec{b}) + \frac{c}{2} d\varrho (\vec{x}, \vec{n}, \vec{b}) \\ &= (1-c) d\mathfrak{s}_0 + (c^2-c) \frac{\varrho}{2} ds - c \frac{\varrho}{2} ds + c d\mathfrak{s}_0 + d(\varrho \vec{x} \vec{t}) \\ &= d\mathfrak{s}_0 + (c^2-2c) \frac{\varrho}{2} ds + d(\varrho \vec{x} \vec{t}), \end{aligned}$$

also

$$\underline{J_c = J_0 + (c^2 - 2c) \oint \frac{\varrho}{2} ds.} \tag{1}$$

3. Für die Evolute  $k_1$  erhält man

$$J_1 = J_0 - \oint \frac{\varrho}{2} ds, \tag{2}$$

somit

$$\underline{J_c = (1-c)^2 J_0 - (c^2-2c) J_1.} \tag{3}$$

Über das Vorzeichen von  $J_1$  gibt die folgende Hilfsbetrachtung Aufschluss: Es ist

$$\oint \frac{\varrho}{2} ds = \frac{1}{4\pi} \oint \kappa ds \cdot \oint \varrho ds \geq \frac{1}{4\pi} \left( \oint ds \right)^2 = \frac{L^2}{4\pi} \geq J_0$$

(zuerst wird die Schwarzsche Ungleichung, dann die isoperimetrische Ungleichung benutzt), also  $J_1 \leq 0$ ;  $J_1 = 0$  nur dann, wenn  $k$  ein Kreis ist, was wir ausschliessen wollen. Statt (3) können wir also auch

$$J_c = (1-c)^2 J_0 + (c^2-2c) |J_1|$$

schreiben. Wenn nun überhaupt die Evolute  $k_1$  einfach geschlossen ist, so muss somit einem positiven Umlauf von  $k$  ein negativer von  $k_1$  entsprechen.  $|J_1|$  ist dann der Flächeninhalt von  $k_1$ . Für negatives  $c = -\lambda$  erhält man in diesem Falle die Flächenformel der Aufgabe<sup>1)</sup>.  
B. ECKMANN, Zürich.

Weitere Lösungen sandten L. BERNSTEIN (Tel-Aviv), F. GOLDNER (London), R. LAUFFER (Graz), H. R. MÜLLER (Graz), A. UNTERBERGER (Bludenz).

**Aufgabe 168.** In einem rechtwinkligen Koordinatensystem ist die Kurve mit der Gleichung  $y = a + b x + c x^2 + d x^3 + e x^4$  ( $a, b, c, d, e$  reell,  $e \neq 0$ ) gegeben. Man finde ohne Differentialrechnung die Bedingung dafür, dass die Kurve eine reelle, echte Doppeltangente besitzt (Tangente mit zwei getrennten Berührungspunkten).

W. PROKOP, Winterthur.

*Lösung:* Sind  $x, y$  normierte Punktkoordinaten eines projektiven Koordinatensystems, so ist die Gerade  $p x + q y + r = 0$  genau dann Doppeltangente der in der Aufgabe angegebenen Kurve, wenn die Gleichung

$$q e x^4 + q d x^3 + q c x^2 + x(q b + p) + q a + r = 0 \tag{1}$$

zwei Paare gleicher Lösungen  $x_1, x_2$  besitzt. Also ist  $q \neq 0$ . Der Koeffizientenvergleich bei (1) und

$$q e (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 = 0 \tag{2}$$

---

<sup>1)</sup> Wenn man auf Formel (1) und die Diskussion des Vorzeichens von  $J_1$  verzichtet, so kann man mit den Rechnungen von 2. die Formel (3) viel kürzer ableiten.

gibt folgende vier Gleichungen, wo  $s_1 = x_1 + x_2$ ,  $s_2 = x_1 x_2$  gesetzt ist:

$$d = -2 e s_1, \quad c = e (s_1^2 + 2 s_2), \quad q b + p = -2 q e s_1 s_2, \quad q a + r = q e s_2^2.$$

Man erhält daraus rational

$$s_1 = -\frac{d}{2e}, \quad s_2 = \frac{c - e s_1^2}{2e} = \frac{4ec - d^2}{8e^2}$$

sowie  $p/q$  und  $r/q$ . Die gegebene Kurve hat daher immer eine reelle Doppeltangente. Die Berührungspunkte dieser Doppeltangente sind reell und verschieden, wenn

$$(x_1 - x_2)^2 = s_1^2 - 4s_2 = \frac{3d^2 - 8ec}{4e^2} > 0.$$

R. LAUFFER, Graz.

Weitere Lösungen sandten F. GOLDNER (London), A. STOLL (Zürich) und A. UNTERBERGER (Bludenz).

**Aufgabe 169.** Von zwei monofokalen Parabeln  $p_1$  und  $p_2$  kennt man je ein Krümmungselement (Punkt samt Krümmungskreis); die beiden Parabeln sind zu konstruieren.

R. BEREIS, Wien.

*Lösung:* Wir benutzen folgenden Hilfssatz:

Berührt ein Kreis  $k$  eine Parabel  $p$  in einem Punkt  $P$  und geht  $k$  durch den Brennpunkt  $F$  von  $p$ , so ist der Radius von  $k$  ein Viertel des zu  $P$  gehörenden Krümmungsradius  $\varrho$ .

Zum Beweis bezeichnen wir mit  $D$  bzw.  $G$  die Schnittpunkte der Kurvennormalen und des Durchmessers durch  $P$  mit der Leitlinie  $l$ . Bekanntlich ist  $\overline{DP} = \varrho/2$ .  $G$  sei der Gegenpunkt des Brennpunktes für die Tangente  $t$  in  $P$ . Spiegelt man nun das bei  $G$  rechtwinklige Dreieck  $DGP$  an  $t$ , so geht  $G$  in den Brennpunkt  $F$ ,  $D$  in den Halbierungspunkt  $H$  der Strecke  $PK$  ( $K =$  Krümmungsmittelpunkt für  $P$ ) über, woraus die Behauptung mit dem Satz von THALES unmittelbar folgt.

Sind nun  $H_1, H_2$  die Mitten der Strecken  $\overline{P_1K_1}$  bzw.  $\overline{P_2K_2}$ , so schneiden sich die Kreise mit den Durchmessern  $\overline{P_1H_1}$  und  $\overline{P_2H_2}$  in dem gemeinsamen Brennpunkt der beiden Parabeln. Es gibt zwei Lösungen, sofern reelle getrennte Schnittpunkte auftreten. Durch die Punkte  $D_1$  und  $G_1$  ist die Leitlinie  $l_1$  und damit die Parabel  $p_1$  bestimmt. Analog findet man die Parabel  $p_2$ .

*Bemerkung des Aufgabenstellers:* Es gilt folgende Verallgemeinerung des obigen Hilfssatzes: Der Umkreis eines Tangentendreiecks einer beliebigen ebenen Kurve  $c$  strebt, wenn  $t_2$  und  $t_3$  unabhängig voneinander gegen  $t_1$  konvergieren, einem Grenzkreis zu, der die Kurve  $c$  berührt und dessen Radius ein Viertel des Krümmungsradius im Berührungspunkt beträgt.

Lösungen sandten R. JAKOBI (Braunschweig), J. LANGR (Prag), R. LAUFFER (Graz), J. SCHOPP (Budapest), A. STOLL (Zürich), A. UNTERBERGER (Bludenz).

**Aufgabe 170.** Man beweise die Identität:

$$\prod_{k=1}^n \left\{ x - 4 \cos^2 \left( \frac{k\pi}{2n+1} \right) \right\} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n-k}{k} x^{n-k}.$$

J. BARINAGA, Madrid.

*Lösung:* In die bekannte Formel

$$\frac{\sin m v}{\sin v} = \sum_{k=0}^{[(m-1)/2]} (-1)^k \binom{m-k-1}{k} (2 \cos v)^{m-2k-1}$$

setzt man

$$m = 2n + 1, \quad v = v_k = \frac{k\pi}{2n+1} \quad (1 \leq k \leq n)$$

und bekommt

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n-k}{k} (4 \cos^2 v_k)^{n-k} = 0.$$

Damit ist gezeigt, dass das Polynom

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n-k}{k} x^{n-k},$$

dessen höchster Koeffizient 1 ist, die  $n$  verschiedenen Wurzeln  $4 \cos^2 v_k$  hat, also genau, was zu beweisen war.

A. BAGER, Hjørring (Dänemark).

Weitere Lösungen sandten F. GOLDNER (London) und R. LAUFFER (Graz).

*Nachtrag:* In der Löserliste von Nr. 163 fehlte A. STOLL (Zürich).

### Neue Aufgaben

194. Soient, dans un triangle quelconque,  $a$  la base,  $A$  le sommet opposé,  $B$  le point d'intersection des hauteurs,  $h_1$  et  $h_2$  les hauteurs ne passant pas par  $A$ . Soit encore  $s$  une droite fixe quelconque. Par le point d'intersection de  $s$  et de  $h_1$ , menons la parallèle  $t$  à  $h_2$ .

1° Si l'on considère tous les triangles ayant en commun  $a$ ,  $A$  et  $B$ , toutes les droites  $t$  enveloppent une parabole  $p_1$ .

2° Si l'on permute les rôles de  $A$  et  $B$ , on obtient une nouvelle parabole  $p_2$ .

3° Les paraboles  $p_1$  et  $p_2$  se coupent en deux points  $R$  et  $S$ . Laissant  $A$  et  $B$  fixes, on fait varier  $a$ . Les points  $R$  et  $S$  engendrent deux nouvelles paraboles symétriques par rapport à  $s$ , passant par les projections de  $A$  et  $B$  sur  $s$  et dont le demi-paramètre est égal à la moyenne géométrique des distances de  $A$  et  $B$  à  $s$ .

J.-P. SYDLER, Zurich.

195. Man beweise: Rollt eine Gerade eines starren ebenen Systems  $\Sigma$  auf einer festen Zykloide, so existiert in  $\Sigma$  ein Strahlenbüschel, dessen Geraden im Ablauf der Bewegung ähnliche Zykloiden umhüllen.

R. BEREIS, Wien.

196. Démontrer que

$$\frac{1}{2^{2n-1}} \cdot \frac{1 - \binom{4n}{2} 3 + \binom{4n}{4} 3^2 - \binom{4n}{6} 3^3 + \dots + \binom{4n}{4n} 3^{2n}}{1 - \binom{4n}{2} + \binom{4n}{4} - \binom{4n}{6} + \dots + \binom{4n}{4n}}$$

est pour tout  $n$  entier positif un nombre entier.

H. BREMEKAMP, Delft.

197. Man beweise für natürliche Zahlen  $r$  und  $s$  die Identität

$$\binom{2s}{r} = \sum_{p=0}^{\lfloor r/2 \rfloor} 2^{r-2p} \binom{s}{r-p} \binom{r-p}{p}$$

M. G. BEUMER, Bergen op Zoom (Holland).

## Literaturüberschau

L. VIETORIS: *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*

Bearbeitet von G. LOCHS, Universitätsverlag Wagner, Innsbruck 1951

Neue Lehrbücher der Differential- und Integralrechnung füllen, selbst wenn sie gut sind, heute keine Lücken mehr aus. Bei dem längst kanonisierten Bestand ihrer Lehrstücke gleichen ihre Verfasser mehr und mehr den Herausgebern von Sonatinalben,