

Kleine Mitteilungen

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **8 (1953)**

Heft 6

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

rotating through 180° , only that for the conchoid the starting-point is not the centre of rotation but the meeting-point of the moving line with a fixed line outside it. The analogy now appears in a new light. The conchoid is, so to speak, the Euclidean trace or signature of a *negative*-Euclidean circle (or of an infinite number of such circles, according to the position of the point-at-infinity O), for which the base-line or asymptote of the conchoid functions as median line, from the diametral points of which pairs of lines are to diverge keeping a *constant negative and inward distance* towards O . In the negative space determined by the circular rays (absolute involution) in O , the diametral point moves through 180° along the median line to form the total circle. (To be continued.)

GEORGE ADAMS, Clent, Stourbridge (England).

Kleine Mitteilungen

Ein Satz der elementaren Geometrie¹⁾

Es handelt sich um den Satz: Liegt der Punkt D nicht auf dem Umkreis des gleichseitigen Dreiecks ABC , dann lässt sich aus den Strecken \overline{AD} , \overline{BD} und \overline{CD} ein Dreieck konstruieren. Liegt D auf dem Umkreis, dann sind diese Abstände nicht Seiten eines Dreiecks, sondern lediglich Abstände von drei Punkten einer Geraden, was ohne Rechnung zu beweisen ist. Dreht man das Dreieck ABD um den Punkt A um den Winkel 60° so, dass B nach C und D nach D^* kommt, so erhält man die Strecken $DD^* = DA$, $D^*C = DB$ und DC , welche entweder ein Dreieck bilden oder auf einer Geraden liegen. Liegen die Punkte D , D^* und C auf einer Geraden, dann liegt der Punkt D (wegen des Peripheriewinkels 60° bzw. 120°) auf dem Umkreis des Dreiecks ABC .

Die Beweisfigur kann auch als Analysisfigur für die folgende Aufgabe dienen: Gegeben sind die Abstände des Punktes D von den Ecken des gleichseitigen Dreiecks ABC , das Dreieck ist zu konstruieren. Diese Aufgabe hat zwei wesentlich verschiedene Lösungen, da die Strecke DD^* Seite von zwei gleichseitigen Dreiecken ist.

R. LAUFFER, Graz.

Anmerkung der Redaktion. Wie uns Herr A. BAGER (Hiørring) mitteilt, ist die obige Ableitung auch von J. BRATU gefunden worden.

Herr J. W. A. VAN KOL (Eindhoven) teilt uns folgenden einfachen Beweis mit: Man fälle vom Punkte D die Lote auf die Seiten BC , CA , AB des gleichseitigen Dreiecks ABC . Die Fusspunkte P , Q , R bilden im allgemeinen ein nicht ausgeartetes Dreieck. Dessen Seiten PQ , QR , RP sind wegen $PQ = DC \sin 60^\circ$ usw. proportional den Strecken DC , DA , DB . Aus diesen lässt sich somit ein dem Dreieck PQR ähnliches Dreieck konstruieren. Liegt D auf dem Umkreis von ABC , so ergibt sich der Sonderfall, dass P , Q , R einer Geraden angehören.

Mit der nachfolgenden Arbeit schliessen wir die Publikationen zum Satz von POMPEÛ ab.

Généralisation d'un théorème de M. Pompeïu

Dernièrement, M. PAVLOVIĆ a donné dans cette revue²⁾ une démonstration géométrique d'un théorème de M. POMPEÛ: On peut toujours construire un triangle avec les distances d'un point aux sommets d'un triangle équilatéral³⁾. Nous donnons ici une généralisation de ce théorème pour un espace de dimension quelconque.

¹⁾ Siehe unter dem gleichen Titel *El. Math.* 8, 65 (1953).

²⁾ S. V. PAVLOVIĆ, *El. Math.* 8, 13 (1953).

³⁾ D. POMPEÛ, *Bull. Math. Phys. Ecole polyt. Bucarest* 6, 6-7 (1936).

Notons d'abord sans démonstration les propriétés suivantes:

(1) Soit $f_n(x, a_1, \dots, a_{n+1}) = |b_{ij}|$ ($i, j = 1, \dots, n$),

$$b_{ii} = a_i^2 + a_{i+1}^2 + 2x a_i a_{i+1}, \quad b_{ij} = a_i^2 + x(a_1 a_{i+1} - a_{i+1} a_{j+1} + a_{j+1} a_1).$$

Pour tout $a_i, f_n \geq 0$ pour $-1 \leq x \leq 1/n$.

(2) Considérons $s \leq n + 1$ hyperplans de E^n qui se coupent tous sous le même angle φ_s . (Pour $s = n + 1$, on a un simplexe régulier, $\cos \varphi_{n+1} = 1/n$).

Soient P un point quelconque, a_1, \dots, a_s ses distances algébriques aux s hyperplans. La distance $[i, j]$ de P à l'intersection E^{n-2} des hyperplans i et j est donnée par

$$[i, j]^2 = (a_i^2 + a_j^2 + 2 a_i a_j \cos \varphi_s) \frac{1}{\sin^2 \varphi_s}, \quad -1 = \cos \pi \leq \cos \varphi_s \leq \frac{1}{s-1}.$$

(3) Le volume V_k d'un simplexe $A_1 \dots A_{k+1}$ ($\overline{A_i A_j} = [i, j]$) est donné par

$$2(k!)^2 V_k^2 = |c_{ij}| \quad (i, j = 1, \dots, k),$$

$$c_{ii} = 2 [1, i + 1]^2, \quad c_{ij} = [1, i + 1]^2 - [i + 1, j + 1]^2 + [j + 1, 1]^2.$$

(4) Pour que l'on puisse construire un simplexe dont les arêtes $A_i A_j$ aient des longueurs données $[i, j]$, il faut et il suffit que $|c_{ij}| \geq 0$.

(5) En remplaçant dans (3) $[i, j]$ par la valeur (2), on trouve la fonction de (1), donc en vertu de (4) on a le théorème général suivant:

Etant donnés $s \leq n + 1$ hyperplans $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ de E^n qui se coupent sous le même angle, nommons $[i, j]$ la distance d'un point P à l'intersection des hyperplans α_i et α_j . Quel que soit P , il existe un simplexe A_1, \dots, A_s dont les arêtes $A_i A_j$ ont les longueurs $[i, j]$.

Cette propriété n'a pas lieu si les angles ne sont pas égaux.

(6) Dans le cas du simplexe régulier, $x = \cos \varphi_{n+1} = 1/n$, donc

$$f_n\left(\frac{1}{n}, a_1, \dots, a_{n+1}\right) = K \left[\sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_1 \dots a_{n+1}}{a_i} \right]^2.$$

L'hypersurface (simple) déterminée par $f_n = 0$ contient les E^{n-2} du simplexe, car $a_i = a_j = 0$ est une solution de $f_n = 0$. Elle est invariante pour toute permutation des a_i . Elle est d'ordre n .

Rappelons qu'il existe une correspondance ponctuelle relative au simplexe: Tout point P peut être considéré comme le foyer principal d'une hyperquadrique de révolution inscrite au simplexe. Soit P' le deuxième foyer principal. Nous avons nommé la transformation $P \rightleftharpoons P'$ correspondance des foyers et nous avons montré que toute hypersurface d'ordre n contenant les E^{n-2} du simplexe est la transformée d'un hyperplan dans la correspondance des foyers¹⁾. Comme, dans notre cas, la variété $f_n = 0$ reste invariante pour toute permutation des a_i , il doit en être de même pour l'hyperplan correspondant qui est nécessairement l'hyperplan à l'infini. L'hypersurface $f_n = 0$ est donc le lieu des foyers principaux des paraboloides de révolution inscrits au simplexe. Par conséquent, les propriétés suivantes sont équivalentes:

1° P est le foyer principal d'un paraboloides de révolution inscrit à un simplexe régulier.

2° Les pieds des perpendiculaires abaissées de P sur les faces du simplexe se trouvent dans un hyperplan (généralisation de la droite de SIMPSON, hyperplan que nous avons nommé podaire de P).

3° Les distances $[i, j]$ de P aux $E^{n-2} = (\alpha_i, \alpha_j)$ du simplexe déterminent un simplexe $A_1 \dots A_{n+1}$ dégénéré ($A_i A_j = [i, j]$).

4° La somme des inverses des distances (algébriques) de P aux faces du simplexe est nulle [si P n'est pas sur le simplexe].

¹⁾ J.-P. SYDLER, Comm. Math. helv. 19 (1946/47).

Le lieu des points pour lesquels le volume du simplexe correspondant est constant, c'est-à-dire $f_n = \text{const} = K T^2$, se compose des deux hypersurfaces $\Phi(T)$ et $\Phi(-T)$:

$$\Phi(T) = \sum_i \frac{a_1 \cdots a_{n+1}}{a_i} - T = 0, \quad \Phi(-T) = \sum_i \frac{a_1 \cdots a_{n+1}}{a_i} + T = 0.$$

Les variétés $\Phi(T)$ sont également d'ordre n . Comme elles ont les mêmes symétries que le simplexe régulier, on voit que, pour certaines valeurs de T , les $\Phi(T)$ n'ont pas de partie réelle, le centre du simplexe jouant un rôle d'extrême. Soit d la distance du centre aux faces du simplexe:

$$\Phi(T_0) = (n+1) d^n - T_0 = 0.$$

Pour le volume correspondant, on a

$$V_0^2 = \frac{W^2}{(n^2-1)^n},$$

où W désigne le volume du simplexe régulier considéré:

Le lieu des points réels pour lesquels le volume V du simplexe associé est constant se compose de deux parties pour $V^2 \leq W^2/(n^2-1)^n$ et d'une seule pour $V^2 > W^2/(n^2-1)^n$. Précisons enfin ces résultats dans le cas du plan: Les courbes $\Phi(T)$ sont de deuxième ordre, doivent avoir les mêmes symétries que le triangle équilatéral; ce sont donc des cercles concentriques. En particulier, pour $T=0$, on obtient le cercle circonscrit au triangle. Nous pouvons compléter ainsi le théorème dont nous étions partis:

On peut toujours construire un triangle avec les distances d'un point du plan aux sommets d'un triangle équilatéral de centre M et d'aire W . Le lieu des points pour lesquels ce triangle associé a une aire constante V se compose de deux cercles réels de centre M et de rayons

$$\sqrt{\frac{4}{3\sqrt{3}} (W \pm 3V)} \quad \text{pour } V^2 \leq \frac{W^2}{9}$$

et d'un seul cercle réel de centre M et de rayon

$$\sqrt{\frac{4}{3\sqrt{3}} (W + 3V)} \quad \text{pour } V^2 > \frac{W^2}{9}.$$

J.-P. SYDLER, Zurich.

Um den Satz von Wilson

Bekanntlich besagt der sogenannte Wilsonsche Satz:

$$(n-1)! \equiv -1 \pmod{n},$$

wenn n eine Primzahl ist. In W. MANTELS *Getallenleer*, Kap. 7, § 3, lesen wir hierüber: «Der Satz ist merkwürdig, da er niemals stimmt, wenn n eine zusammengesetzte Zahl ist, und deshalb ein Kennzeichen für die Primzahlen bildet. Eine weitere Besonderheit ist, dass man heutzutage Zweifel darüber geäußert hat, ob WILSON tatsächlich gelebt hat.»

In R. FUETER, *Synthetische Zahlentheorie*, steht im II. Kapitel, § 8: «Der Cambridger Professor E. WARING hat in seinen *Meditationes algebraicae* (Cambridge 1770, S. 218) den Satz als von J. WILSON herrührend ohne Beweis veröffentlicht.»

Mehr hat der Schreiber dieser Zeilen anfangs über den Ursprung des Satzes und seinen *Entdecker* nicht gefunden, bis die nützlichen Hinweise des Herrn Prof. BUCHNER, dem hier Dank ausgesprochen sei, ihn in die Lage versetzt haben, Klarheit zu bringen.

In JOHANNES TROPFKE, *Geschichte der Elementar-Mathematik*, Bd. I, S. 103, finden wir: «Von E. WARING (*Meditationes algebraicae*, 1762) zuerst erwähnt und J. WILSON (1741–1793) zugeschrieben, aber schon ein Jahrhundert vorher von LEIBNIZ erkannt.»

In H. WEBER und J. WELLSTEIN, *Encyclopädie der Elementar-Mathematik*, Bd. I, S. 264: «Die erste Erwähnung dieses Satzes findet sich in WARINGS *Meditationes algebraicae*, deren erste Auflage 1770 (?) erschien: ‚Hanc maxime elegantem numerorum primorum proprietatem invenit vir clarissimus, rerumque mathematicarum peritissimus Ioannes Wilson Armiger.‘ Dieser IOANNES WILSON ARMIGER ist ohne Zweifel identisch mit Sir JOHN WILSON, der 1741–1793 lebte, von dem es in der *National Biography*, LXII, 107 (London 1900) heisst: ‘While still an undergraduate he is said to have made an able reply to the attack on EDWARD WARING’S *Miscellanea analytica* by WILLIAM POWELL’».

Es ist hier unwesentlich, ob die erste Auflage der Arbeit WARINGS 1762 oder 1770 erschienen ist. Wichtig ist, dass er diesen WILSON gekannt haben muss: Er nennt ihn ja einen «vir clarissimus». Die obenerwähnte *National Biography* behauptet, dass WILSON schon als «undergraduate», das heisst als angehender Wissenschaftler, eine beachtenswerte Abhandlung geschrieben habe. Mit dieser Kenntnis versehen, können wir uns nicht länger dem von W. MANTEL geäusserten Zweifel, ob WILSON tatsächlich gelebt habe, anschliessen.

RENÉ FURNÉE, Zürich.

Aufgaben

Aufgabe 165. Man beweise: Für $(a, n) = 1$ ist

$$x \equiv a - 12 \sum_{k=1}^{n-1} k \left[\frac{ka}{n} \right] \pmod{n}$$

Lösung der Kongruenz $ax \equiv 1 \pmod{n}$.

B. VAN DER POL, Genf.

Lösung: Wir setzen

$$ka = q_k n + r_k, \quad q_k = \left[\frac{ka}{n} \right] \quad (1 \leq k \leq n-1). \tag{1}$$

Wegen $(a, n) = 1$ ist $a, 2a, \dots, (n-1)a$ ein vollständiges Restsystem mod n . Nach (1) ist $r_k \equiv ka \pmod{n}$ und $0 \leq r_k < n$, also ist die Gesamtheit der Zahlen r_1, r_2, \dots, r_{n-1} identisch mit der Gesamtheit der Zahlen $1, 2, \dots, n-1$. Aus (1) folgt durch Quadrieren und Addition der entstehenden $n-1$ -Gleichungen

$$a^2 \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = n^2 \sum_{k=1}^{n-1} q_k^2 + 2n \sum_{k=1}^{n-1} q_k r_k + \sum_{k=1}^{n-1} r_k^2.$$

Aus

$$\sum_{k=1}^{n-1} r_k^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1)$$

folgt weiter

$$6n \sum_{k=1}^{n-1} q_k^2 + 12 \sum_{k=1}^{n-1} q_k r_k = (n-1)(2n-1)(a^2-1).$$

Da

$$q_k = \left[\frac{ka}{n} \right], \quad r_k \equiv ka \pmod{n}$$

ergibt sich schliesslich

$$12a \sum_{k=1}^{n-1} k \left[\frac{ka}{n} \right] \equiv a^2 - 1 \pmod{n}$$

oder

$$a \left\{ a - 12 \sum_{k=1}^{n-1} k \left[\frac{ka}{n} \right] \right\} \equiv 1, \pmod{n}$$

was zu beweisen war.

A. BAGER (Hjørring, Dänemark).

Eine weitere Lösung sandte F. GOLDNER (London).