

Coup d'oeil sur l'état actuel de l'hypothèse du continu

Autor(en): **Sierpiski, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **8 (1953)**

Heft 1

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-16912>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer*

El. Math.

Band VIII

Nr. 1

Seiten 1-24

Basel, 15. Januar 1953

Coup d'œil sur l'état actuel de l'hypothèse du continu

Je tâcherai d'abord d'expliquer d'une façon aussi élémentaire que possible ce qu'est *l'hypothèse du continu*.

On connaît plusieurs énoncés de cette hypothèse dont certains sont élémentaires.

L'énoncé le plus élémentaire connu de l'hypothèse du continu est le suivant:

H_1 : *Il existe une décomposition de l'espace euclidien E à trois dimensions en trois ensembles E_i ($i = 1, 2, 3$), tels que si l'on désigne par OX_i ($i = 1, 2, 3$) les trois axes des coordonnées de l'espace E , l'ensemble E_i est fini sur toute parallèle à l'axe OX_i pour $i = 1, 2, 3$.*

(C'est-à-dire que, quelle que soit la droite d parallèle à l'axe OX_i , il n'y a qu'un nombre fini de points de l'ensemble E_i situés sur la droite d , nombre qui dépend de la droite d).

Accepter l'hypothèse du continu, c'est affirmer l'existence de trois ensembles E_i ($i = 1, 2, 3$) satisfaisant aux conditions de l'énoncé H_1 . Nous ne supposons pas ici que nous savons construire de tels ensembles E_i , ni même que nous les savons définir effectivement. [Or, on peut démontrer que si de tels ensembles E_i ($i = 1, 2, 3$) existent, ils ne peuvent pas être tous les trois mesurables au sens de LEBESGUE. D'autre part, on déduit des résultats de M. K. GÖDEL¹) qu'on sait définir trois ensembles E_i ($i = 1, 2, 3$) (d'ailleurs fort compliqués) dont on peut démontrer que l'hypothèse qu'ils satisfont à l'énoncé H_1 est non contradictoire avec les axiomes de la théorie des ensembles, si ces axiomes ne sont pas contradictoires.]

Le premier énoncé de l'hypothèse du continu a été donné par G. CANTOR sous une forme différente, moins élémentaire que l'énoncé H_1 .

On dit que deux ensembles M et N (formés d'éléments quelconques) ont la *même puissance* s'il existe entre leurs éléments une correspondance biunivoque (c'est-à-dire si leurs éléments peuvent être rangés en couples disjointes de manière que chaque couple contienne un élément de l'ensemble M et un élément de l'ensemble N , tout élément de M ou de N ayant sa couple). Les ensembles qui ont la même puissance que l'ensemble de tous les nombres naturels (1, 2, 3, ...) sont dits *dénombrables*. Les ensembles infinis qui ne sont pas dénombrables sont dits *indénombrables*. Les ensembles qui ont la même puissance que l'ensemble de tous les nombres réels sont dits *de puissance du continu*. On démontre que les ensembles de puissance du continu sont

¹) Voir le livre de K. GÖDEL cité au renvoi 1 à la page 3. Cf. aussi W. SIERPIŃSKI, Rend. Mat. Applicazioni [V], 10, Fasc. 1/2, 5 (Rome 1951).

indénombrables. *L'hypothèse du continu* (Cantorsche *Kontinuumshypothese*) peut être exprimée sous la forme de l'hypothèse H_2 suivante :

H_2 : *Tout ensemble indénombrable de nombres réels a la puissance du continu.*

La différence entre les énoncés H_1 et H_2 ne consiste naturellement pas en ce que H_1 est une proposition d'existence, puisque, à vrai dire, H_2 est aussi une proposition d'existence, à savoir la proposition qu'il existe, pour tout ensemble indénombrable N de nombres réels, une correspondance biunivoque entre les éléments de N et entre tous les nombres réels. A ce point de vue, on pourrait même regarder l'énoncé H_2 comme plus compliqué que H_1 , vu que, pour démontrer H_1 , il suffit de prouver l'existence d'un seul triple d'ensembles E_i ($i = 1, 2, 3$) satisfaisant à H_1 , tandis que pour démontrer H_2 il faut démontrer, pour tout ensemble indénombrable de nombres réels (et il existe une infinité indénombrable de tels ensembles), l'existence d'une correspondance biunivoque convenable. (On pourrait d'ailleurs réduire la démonstration de H_2 à celle de l'existence d'une seule correspondance biunivoque entre tous les nombres réels et tous les nombres ordinaux transfinis de la deuxième classe, mais alors on sort du domaine des nombres réels.)

En utilisant l'axiome du choix, on peut démontrer que les énoncés H_1 et H_2 sont équivalents, c'est-à-dire qu'ils sont à la fois tous les deux vrais ou tous les deux faux¹).

On peut démontrer (sans faire appel à l'hypothèse du continu) qu'il existe un ensemble indénombrable qui est de même puissance que tout son sous-ensemble indénombrable. Un tel ensemble est dit *de puissance aleph-un*. On démontre (à l'aide de l'axiome du choix) qu'il existe des ensembles de nombres réels de puissance aleph-un et que deux ensembles de puissance aleph-un ont toujours même puissance. L'énoncé H_2 peut être exprimé ainsi :

H_3 : *L'ensemble de tous les nombres réels a la puissance aleph-un.*

Quant à l'énoncé H_1 , on peut démontrer qu'il équivaut à l'énoncé H_4 suivant :

H_4 : *Le plan est une somme de deux ensembles dont l'un est dénombrable sur toute parallèle à l'axe d'ordonnées et l'autre dénombrable sur toute parallèle à l'axe d'abscisses².*

Récemment M. P. ERDÖS a démontré que l'énoncé H_5 suivant (qui peut être regardé comme une généralisation de l'énoncé H_4) équivaut à l'énoncé H_3 :

H_5 : *Si l'on décompose toutes les droites situées dans le plan P en deux classes disjointes L_1 et L_2 , il existe une décomposition du plan P en deux ensembles S_1 et S_2 tels que, pour $i = 1, 2$, toute droite de la classe L_i a un nombre fini ou une infinité dénombrable de points communs avec l'ensemble S_i .*

On a tiré de l'hypothèse du continu maintes conséquences dont aucune n'a conduit à une contradiction et dont plusieurs ont été ensuite démontrées sans cette hypothèse. D'autre part, plusieurs propositions importantes de diverses branches des mathématiques ne peuvent être démontrées dans l'état actuel de la science qu'en faisant intervenir l'hypothèse du continu. On connaît même un certain nombre de propositions intéressantes qui sont équivalentes à cette hypothèse³). Tout cela

¹) Voir W. SIERPIŃSKI, Rend. Mat. Applicazioni [V], 10, Fasc. 3/4, 1-5. (Rome 1951), Cf. W. SIERPIŃSKI, Rend. Circolo mat. Palermo [II], 1, 1-4 (1952).

²) Voir ma note du Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie du 21 février 1919, ainsi que Fundamenta Mathematicae 5, 179 (1924).

³) Voir mon livre *Hypothèse du continu*, Monografie Matematyczne, tome IV (Varsovie-Lwow 1934), p. 9-35. Voir aussi F. ROTHBERGER, Fund. Math. 30, 215 (1938) et W. SIERPIŃSKI, Bull. Soc. royale Sci. Liège 1951, 297.

justifie le vif intérêt que suscite l'hypothèse du continu. Même pour les personnes qui ne reconnaissent pas les raisonnements basés sur cette hypothèse, il est important de savoir quelles sont les propositions qu'actuellement on ne sait pas démontrer sans faire appel à cette hypothèse (ou à une de ses conséquences).

M. K. GÖDEL a démontré que l'hypothèse du continu est compatible avec le système d'axiomes de la théorie des ensembles habituellement admis, (si ces axiomes ne sont pas contradictoires)¹⁾. Il en résulte qu'en tirant des conséquences de l'hypothèse du continu on n'aboutira jamais à une contradiction — sauf dans le cas où les axiomes habituellement admis de la théorie des ensembles sont contradictoires.

Il existe des personnes qui ne croient pas que l'on puisse, sans admettre un nouvel axiome, résoudre le problème de savoir si l'hypothèse du continu est vraie ou non.

Or, dans son travail *What is Cantor's continuum problem?*²⁾, K. GÖDEL exprime l'opinion que finalement on sera obligé d'accepter de nouveaux axiomes dont il résultera la fausseté de l'hypothèse du continu ("that it will finally lead to the discovery of new axioms which will make it possible to disprove CANTOR'S conjecture").

Chacune des conséquences de l'hypothèse du continu donne lieu à la question: Peut-on la démontrer sans l'hypothèse du continu (ou, du moins, à l'aide d'hypothèses plus faibles) ou bien, par contre, est-elle équivalente à cette hypothèse. Il est parfois difficile de répondre à cette question. Voici un exemple.

Appelons *graphique* d'une fonction réelle $f(x)$ d'une variable réelle x l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $y = f(x)$. Appelons *courbe généralisée* tout ensemble plan qui est superposable (par translation ou par rotation) avec le graphique d'une fonction réelle d'une variable réelle.

Une conséquence de l'hypothèse du continu est la proposition que *le plan est une somme d'une infinité dénombrable de courbes généralisées*³⁾. Or, nous ne savons pas résoudre le problème si cette proposition est équivalente à l'hypothèse du continu. (Nous savons cependant démontrer sans faire appel à l'hypothèse du continu que tout ensemble plan de puissance \aleph_1 est contenu dans une somme d'une infinité dénombrable de courbes généralisées⁴⁾).

Voici maintenant une proposition dont on sait démontrer qu'elle est équivalente à l'hypothèse du continu, mais la démonstration est difficile.

Disons qu'un ensemble de nombres réels E se compose de nombres *rationnellement indépendants* si, x_1, x_2, \dots, x_n étant un nombre fini quelconque de nombres distincts de E , il n'existe aucun système d'entiers a_1, a_2, \dots, a_n qui ne soient pas tous à la fois nuls, tels que $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$. MM. ERDÖS et KAKUTANI ont démontré⁵⁾ que l'hypothèse du continu équivaut à la proposition H_6 suivante:

H_6 : *L'ensemble de tous les nombres réels est une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles dont chacun se compose de nombres rationnellement indépendants.*

¹⁾ K. GÖDEL, Proc. nat. Acad. Sci. 23, 556–557 (1938); *The consistency of the axiom of choice and of generalized continuum hypothesis with the axioms of the set theory*, Ann. math. Studies N° 3 (Princeton 1940).

²⁾ K. GÖDEL, Amer. math. Monthly 54, 524 (1947).

³⁾ Cette proposition a été déduite de H_3 par N. LUSIN. Voir W. SIERPIŃSKI, C. r. Soc. Sci. Lettres Varsovie, Cl. III, 25, 11 (1932). On peut même admettre que toutes ces courbes généralisées sont deux à deux superposables: voir W. SIERPIŃSKI, Fund. Math. 21, 39 (1933).

⁴⁾ Voir W. SIERPIŃSKI, Fund. Math. 38, 8 (1951).

⁵⁾ Bull. amer. math. Soc. 49, 459 (1943).

On appelle *hypothèse généralisée du continu* l'hypothèse que, E étant un ensemble infini quelconque et S l'ensemble de tous les sous-ensembles de E , tout sous-ensemble de S qui contient un sous-ensemble de même puissance que E et qui n'est pas lui-même de même puissance que E , est de même puissance que S .

L'hypothèse du continu est un cas particulier de cette hypothèse du continu généralisée, notamment lorsque E est l'ensemble de tous les nombres naturels.

M. K. GÖDEL a démontré¹⁾ que l'hypothèse généralisée du continu est non contradictoire avec les axiomes généralement admis de la théorie des ensembles, si ces axiomes ne sont pas contradictoires.

Une des conséquences de l'hypothèse généralisée du continu est l'axiome du choix²⁾.

W. SIERPIŃSKI, Varsovie.

Kinematik, Liesche Kreisgeometrie und Geraden-Kugel-Transformation³⁾

I. Ebene Kinematik

Man kann nach E. STUDY⁴⁾ die Bewegungen (Drehungen, Parallelverschiebungen) der Ebene durch vier homogene Parameter $\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$ mit bilinearer Zusammensetzung darstellen.

Ist (x_m, y_m) der Drehungsmittelpunkt und ω der Drehwinkel dieser Drehung (Figur 1), so gilt für diese Studyschen Parameter

$$\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = -\operatorname{ctg} \frac{\omega}{2} : x_m : y_m : 1.$$

$\alpha_3 = 0$ liefert (Figur 2) Parallelverschiebungen um den Vektor $(-2 \alpha_2/\alpha_0, 2 \alpha_1/\alpha_0)$ der Länge Ω . Die Bewegungsformeln lauten dann in homogenen kartesischen Koordinaten $x_1 : x_2 : x_3 = x : y : 1$:

$$\begin{aligned} (\alpha_0^2 + \alpha_3^2) x'_1 &= (\alpha_0^2 - \alpha_3^2) x_1 + 2 \alpha_0 \alpha_3 x_2 + 2 (\alpha_1 \alpha_3 - \alpha_0 \alpha_2) x_3, \\ (\alpha_0^2 + \alpha_3^2) x'_2 &= -2 \alpha_0 \alpha_3 x_1 + (\alpha_0^2 - \alpha_3^2) x_2 + 2 (\alpha_0 \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_3) x_3, \\ (\alpha_0^2 + \alpha_3^2) x'_3 &= (\alpha_0^2 + \alpha_3^2) x_3, \end{aligned}$$

und die bilinearen Zusammensetzungsformeln sind

$$\begin{aligned} \alpha''_0 &= \alpha_0 \alpha'_0 & * & & * & - \alpha_3 \alpha'_3, & \alpha''_2 &= \alpha_0 \alpha'_2 + \alpha_2 \alpha'_0 + \alpha_3 \alpha'_1 - \alpha_1 \alpha'_3, \\ \alpha''_1 &= \alpha_0 \alpha'_1 + \alpha_1 \alpha'_0 + \alpha_2 \alpha'_3 - \alpha_3 \alpha'_2, & \alpha''_3 &= \alpha_0 \alpha'_3 + \alpha_3 \alpha'_0 & * & & * \end{aligned}$$

¹⁾ K. GÖDEL, Proc. nat. Acad. Sci. 24, 556–557 (1938); *The consistency of the axiom of choice and of generalized continuum hypothesis with the axioms of the set theory*, Ann. math. Studies N° 3 (Princeton 1940).

²⁾ Cette proposition a été énoncée sans démonstration en 1926 par A. LINDENBAUM et A. TARSKI dans leur *Communication sur les recherches de la théorie des ensembles*, C. r. Soc. Sci. Varsovie, Cl. III, 19, 314 (1926), th. 94. Pour la démonstration voir W. SIERPIŃSKI, Fund. Math. 34, 1–5 (1947).

³⁾ Vortrag, gehalten am 19. September 1951 auf der Tagung der DMV. in Berlin.

⁴⁾ EDUARD STUDY, a) *Über Systeme komplexer Zahlen und ihre Anwendung in der Theorie der Transformationsgruppen*, Mh. Math. Phys. 1, 283–355 (1890); b) *Von den Bewegungen und Umlegungen*, Math. Ann. 39, 441–566 (1891).