Denkt man sich die geschilderte Konstruktion für andere Deklinationswerte δ, jedoch unter Beibehaltung des Kreisradius a wiederholt, so erhält man offensichtlich lauter kongruente und gleichgestellte Ellipsen mit *kongruenten Markenpolygonen*. Es liegt daher nahe, diese durch Verschiebung in Nord-Süd-Richtung zur Deckung zu bringen: Dann muss aber der Zeigerstab von Tag zu Tag einen neuen Standort haben, und zwar hat er, wie aus der Figur abzulesen ist, jeweils in der Entfernung

$$d = a \operatorname{tg} \delta \cos \varphi \tag{2}$$

nördlich vom Ellipsenzentrum zu stehen. Die Konstruktion der entsprechenden *Kalenderskala* geht aus der Figur wohl zur Genüge hervor. Dass hierbei viele der nur zu Erklärungszwecken aufgenommenen Linien entbehrlich sind, liegt auf der Hand; auch die Ermittlung der Stundenskala kann mittels der Ellipsenkonstruktion von PROKLUS noch rationalisiert werden.

Abschliessend sei bemerkt, dass sich die geometrischen Überlegungen ohne weiteres auch auf eine Zifferblattebene beliebiger Stellung und einen Zeigerstab beliebiger Richtung übertragen lassen: An Stelle des Grundrisses hat dann eben die Parallelprojektion in Zeigerrichtung auf die Ziffernebene zu treten. W. WUNDERLICH, Wien.

Aufgaben

Aufgabe 131. Man beweise

$$\sqrt{2} = 2 \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(4k-3)(4k-1)}{(4k-2)(4k-2)}$$

und stelle eine entsprechende Produktentwicklung für $\sqrt{n}$ auf.

K. SCHNEIDER, Oberdorf, BL.

Zu dieser Aufgabe schreibt uns Prof. W. SIERPINSKI (Warschau):

«Ce problème a été résolu par moi en 1908[1]). La formule pour $\sqrt{n}$ trouvée par moi était

$$\sqrt{n} = \prod_{k} \frac{k + (-1)^{[k/n]}}{k}, \tag{1}$$

où le produit doit être étendu à toutes les valeurs k impaires et non divisibles par n. Pour $n = 2$, on trouve la formule bien connue de EULER[2])

$$\sqrt{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{10 \cdot 10}{9 \cdot 11} \cdots$$

déduite par lui du développement de sin πx en produit infini pour $x = 1/4$. Cette formule donne tout de suite la formule du problème 131.

Pour $n = 3$, on trouve la formule de STERN[3])

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4 \cdot 8}{5 \cdot 7} \cdot \frac{10 \cdot 14}{11 \cdot 13} \cdot \frac{16 \cdot 20}{17 \cdot 19} \cdots$$

---

1) W. SIERPIŃSKI, C. r. Soc. Sci. Varsovie, Cl. III, *1908*, 138–140.

2) L. EULER, *Introductio* (Lausanne 1748), p. 147. *L. Euleri Opera omnia*, Ser. I, Vol. 8, p. 198.

3) STERN, *Lehrbuch der algebraischen Analysis* (Leipzig 1860), p. 375.

Pour démontrer d'une façon élémentaire la formule (1), il suffit de remarquer que, en désignant par p_m le produit de m premiers facteurs du produit infini (1), on a

$$p_{nm}^2 = \frac{n}{\prod\limits_{k=m}^{nm-1}\left(1 + \frac{1}{2k(2k+2)}\right)}, \quad p_{nm}^2 = \frac{2nm+1}{2m+1}\prod_{k=m}^{nm-1}\left(1 + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\right)\text{[1]},$$

d'où l'on trouve tout de suite

$$n > p_{nm}^2 > \frac{2nm+1}{2m+1},$$

ce qui donne

$$\lim_{m\to\infty} p_{nm} = \sqrt{n}\,.$$

Il est encore à remarquer qu'en 1907 j'ai démontré[2]) d'une façon élémentaire pour m et n naturels, $n > 1$, la formule

$$\sqrt[m]{n} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{\tau(n,k)}{mk-1}\right), \tag{2}$$

où $\tau(n, k)$ est égale à $1 - n$ ou à 1 suivant que k est divisible par n ou ne l'est pas. Donc en particulier, pour $n = 2$ et m naturel:

$$\sqrt[m]{2} = \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2m-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3m-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4m-1}\right)\cdots\text{[3]})$$

Pour $m = 2$ on retrouve la formule citée de EULER. Or, pour $m = 2$ la formule (2) donne la formule (1). La formule (2) peut être encore généralisée: on a pour x réel < 1 et n naturel > 1 la formule

$$n^x = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{\tau(n,k)\,x}{k-x}\right),$$

mais la démonstration n'est pas élémentaire.»

Der Aufgabensteller sowie A. BAGER (Hjørring, Dänemark) verwenden die bekannte Formel

$$\prod_{r=1}^{n-1}\sin\frac{r\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Der Aufgabensteller gibt die Formel

$$\sqrt{n} = 2^{n-1}\frac{(2n-1)!}{n^{2n-1}}\cdot\frac{(4n-1)!}{(2n)!\,(3n)^{2n-1}}\cdot\frac{(6n-1)!}{(4n)!\,(5n)^{2n-1}}\cdots.$$

---

[1]) Aus den beiden Ausdrücken für p_{nm}^2 ergibt sich

$$p_{nm} = \frac{2m+2}{2m+1}\cdot\frac{2m+4}{2m+3}\cdots\frac{2nm}{2nm-1}.$$

Aus (1) erhält man für $n = 2t+1$:

$$p_{nm} = \frac{2\cdot4\cdots2t\,(2t+2)\cdots4t}{1\cdot3\cdots(2t-1)\,(2t+3)\cdots(4t+1)}\cdot\frac{(4t+4)\cdots(6t+2)\,(6t+4)\cdots(8t+2)}{(4t+3)\cdots(6t+1)\,(6t+5)\cdots(8t+3)}\cdots$$

und für $n = 2t$:

$$p_{nm} = \frac{2\cdot4\cdots(2t)\,(2t)\cdots(4t-2)}{1\cdot3\cdots(2t-1)\,(2t+1)\cdots(4t-1)}\cdot\frac{(4t+2)\cdots(6t)\,(6t)\cdots(8t-2)}{(4t+1)\cdots(6t-1)\,(6t+1)\cdots(8t-1)}\cdots,$$

woraus sich die Übereinstimmung leicht erkennen lässt (Red.).

[2]) W. SIERPIŃSKI, Bull. Acad. Sci. Cracovie, Cl. Sci. math., *1907*, 1052—1057.

[3]) W. SIERPIŃSKI, Wiadom. Mat. *12* (1908).

Die Formel von A. BAGER lautet:

$$\sqrt{n} = 2^{n-1} \prod_{\nu=1}^{\infty} \prod_{r=1}^{2n-1} \frac{2n\nu - r}{2n\nu - n} .$$

Eine weitere Lösung sandte F. GOLDNER (London).

Aufgabe 132. Sind $a_1, a_2, \ldots, a_m; b_1, b_2, \ldots, b_m, b_i \leqq a_i$ natürliche Zahlen und wird

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = A , \quad \sum_{i=1}^{m} b_i = B$$

gesetzt, so gilt

$$0 < \prod_{i=1}^{m} \binom{a_i}{b_i} \leqq \binom{A}{B} .$$

Man beweise diese Ungleichung. Erwünscht wären noch andere Abschätzungen dieses Produkts von Binomialkoeffizienten. ERWIN BAREISS, Zürich.

Lösung: Die zu beweisende Ungleichung folgt sogleich durch Vergleichung der Koeffizienten von x^B in der Identität

$$(1+x)^A = \prod_{i=1}^{m} (1+x)^{a_i} = \prod_{i=1}^{m} \left\{1 + \binom{a_i}{1} x + \cdots + \binom{a_i}{b_i} x^{b_i} + \cdots + x^{a_i}\right\} .$$

F. GOLDNER, London.

A. MOÓR (Debrecen) beweist folgende Verallgemeinerungen, wo r, p_i, q_i natürliche Zahlen sind:

$$0 < \prod_{i=1}^{m} \binom{n_i}{q_i} \binom{a_i}{b_i} \leqq \binom{A^*}{B^*}, \quad \text{wo} \quad A^* = \sum_{i=1}^{m} p_i a_i , \quad B^* = \sum_{i=1}^{m} q_i b_i . \tag{1}$$

$$0 < \prod_{i=1}^{m} \binom{a_i}{b_i} \leqq \binom{A^r}{B^r}^{1/r} . \tag{2}$$

Eine weitere Lösung sandte R. LAUFFER (Graz).

Aufgabe 133. Eine Gerade bewegt sich so, dass sie stets durch einen festen Punkt O geht und einer ihrer Punkte stets auf einem festen Kreise liegt. Ein Punkt P dieser Gerade werde so gewählt, dass die von ihm beschriebene Kurve k durch O geht. Zeige, dass der Krümmungsradius von k in O gleich dem halben Abstand von O und dem zugehörigen Momentanzentrum ist. R. SCHOECK, Winterthur.

Lösung: Der Zusatz: «und einer ihrer Punkte stets auf einem festen Kreis liegt» ist überflüssig.

M sei der momentane Drehpol einer ebenen Bewegung ($S_1 =$ festes System, $S_2 =$ bewegtes System) und die bewegte Gerade g gehöre dem System S_2 an. Die Gerade n durch M schneide den Wendekreis im Punkt W_2 und den Wendekreis der reziproken Bewegung (S_2 ist fest und S_1 bewegt) im Punkt W_1. Es ist $\overrightarrow{W_2 M} = \overrightarrow{M W_1}$.

Ist der Punkt P_2 auf der Geraden n Punkt von S_2 und K_2 der Krümmungsmittelpunkt der Bahn (P_2), dann lautet die (vorzeichensichere) Gleichung von SAVARY

$$\frac{1}{\overrightarrow{MK_2}} = \frac{1}{\overrightarrow{MP_2}} - \frac{1}{\overrightarrow{MW_2}} . \tag{1}$$

Für die reziproke Bewegung sei P_1 der augenblicklich mit P_2 zusammenfallende Punkt von S_1 und K_2 der Krümmungsmittelpunkt der Bahn (P_1) [(P_1) liegt in S_2], und es ist wegen $\overrightarrow{W_2 M} = \overrightarrow{M W_1}$:

$$\frac{1}{\overrightarrow{MK_1}} = \frac{1}{\overrightarrow{MP_2}} + \frac{1}{\overrightarrow{MW_2}} . \tag{2}$$

Ist daher bei der reziproken Bewegung die Bahn (P_1) die bewegte Gerade g und $P_1 \equiv O$, dann ist $O \equiv W_1$, da K_1 unendlich fern ist. Aus den Gleichungen (1) und (2) erhält man

$$\overrightarrow{MK_2} = \frac{1}{2} \overrightarrow{MO},$$

das heisst, der Krümmungsmittelpunkt K_2 der Bahn (P_2) des Punktes P der Geraden g, welcher augenblicklich mit dem festen Punkt O zusammenfällt, ist der Halbierungspunkt der Strecke $\overline{MO}$. R. LAUFFER, Graz.

Eine kinematische Lösung der Aufgabe findet sich auch bei TH. PÖSCHL, *Statik und Mechanik*, 3. Aufl. (Springer, Berlin 1949), S. 219. Weitere Lösungen sandten F. GOLDNER (London), W. LÜSSY (Winterthur), A. SCHWARZ (Seuzach), G. V. TORDION (Zürich).

Aufgabe 134. Der Radius OA eines Kreises werde in fünf gleiche Teile geteilt. B_1, B_2, B_3 und B_4 seien die Schnittpunkte der in den Teilpunkten aut OA errichteten Lote mit der Kreisperipherie. Man beweise, dass alle Winkel AOB_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ mit dem rechten Winkel inkommensurabel sind. VICENTE INGLADA, Madrid.

Lösung: Für den indirekten Beweis setzen wir

$$\sphericalangle AOB_i = \vartheta_i = \frac{p}{q} \cdot \frac{\pi}{2}, \qquad (p, q \text{ ganz})$$

wo i einen der Werte 1, 2, 3, 4 haben kann. Dann ist $\cos \vartheta_i = i/5$, und man erhält aus

$$\cos 2 q \vartheta_i = \sum_{s=0}^{q} (-1)^s \binom{2q}{2s} (\cos \vartheta_i)^{2q-2s} (\sin \vartheta_i)^{2s}$$

durch Ersetzen von $\sin \vartheta_i$ durch $\cos \vartheta_i$

$$(-1)^p = \sum_{s=0}^{q} a_{2q-2s} \left(\frac{i}{5}\right)^{2q-2s} \qquad (*)$$

Hier ist

$$a_{2q} = \binom{2q}{0} + \binom{2q}{2} + \cdots + \binom{2q}{2q} = 2^{2q-1},$$

und die übrigen a_{2q-2s} sind ganze Zahlen. Multiplizieren wir (*) mit 5^{2q-2}, so folgt, dass $2^{2q-1} i^{2q}/25$ eine ganze Zahl sein müsste, was unmöglich ist. F. GOLDNER, London.

Eine weitere Lösung sandte A. BAGER (Hjørring, Dänemark).

Aufgabe 135. Gegeben zwei in bezug auf einen gemeinsamen Durchmesser zueinander symmetrisch liegende Parabeln P_1, P_2 (Parameter p, Achsendistanz $2k$). Dann hat die Aufgabe: «Ein Quadrat zu zeichnen, dessen Ecken abwechselnd auf P_1 und P_2 liegen» für $k < p$ keine, für $k = p$ unendlich viele und für $k > p$ genau zwei Lösungen. Man berechne im letztern Fall die Quadratseite. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht.

Lösung: a) Die beiden Parabeln können dargestellt werden durch

$$(y \pm k)^2 = 2 p x. \qquad (1)$$

Die auf die vorgeschriebene Art eingeschriebenen Vierecke seien zunächst einfach Parallelogramme mit den Mittelpunkten (u, v). Ihre Diagonalen sind dann konjugiert zu $y = v$ in bezug auf jede der beiden Parabeln und haben daher die Steigungsmasse

$$m = \frac{p}{v \pm k}, \qquad (2)$$

unabhängig von u. Für $v = 0$, und nur für dieses, sind die beiden m entgegengesetzt gleich.

b) Aus (2) folgt sofort: *Die fraglichen Parallelogramme sind Rhomben dann und nur dann, wenn $v^2 = k^2 - p^2$ ist.* Das ist der Fall für zwei oder ein oder kein reelles v, je nachdem k grösser oder gleich oder kleiner als p ist. Allgemein erhält man für den Sinus des Winkels w zwischen den Diagonalen:

$$\sin w = \frac{2kp}{\sqrt{4k^2p^2 + (v^2 - k^2 + p^2)^2}} . \tag{3}$$

c) Für die Schnittpunkte von $(y - v) = p(x - u)/(v + k)$ mit der zugeordneten Parabel $(y + k)^2 = 2px$ erhält man durch Elimination von x:

$$y^2 - 2vy - 2pu + 2v(v + k) + k^2 = 0 ,$$

und daher

$$(y - v)^2 = 2pu - (v + k)^2 \quad \text{und} \quad p^2(x - u)^2 = (v + k)^2(y - v)^2 .$$

Für die Länge s der halben Sehne gilt daher:

$$\begin{aligned} p^2 s^2 &= \{(v + k)^2 + p^2\}\{2pu - (v + k)^2\} \\ &= (v^2 + k^2 + p^2)(2pu - v^2 - k^2) - 4k^2v^2 + 2kv(-2pu + 2v^2 + 2k^2 + p^2). \end{aligned} \tag{4}$$

Für die andern beiden Parallelogrammecken ist k durch $-k$ zu ersetzen. Sollen also die fraglichen Parallelogramme Rechtecke sein, dann muss

$$v(-2pu + 2v^2 + 2k^2 + p^2) = 0 \tag{5}$$

gelten. Das heisst:

Die Mittelpunkte aller auf die vorgeschriebene Weise eingeschriebenen Rechtecke liegen entweder auf dem den beiden Parabeln gemeinsamen Durchmesser $v = 0$, *mit den Seiten parallel und normal dazu, oder auf der Parabel* $v^2 = p\{u - (2k^2 + p^2)/2p\}$.

Die ersteren sind alle einander ähnlich und werden zufolge b) dann und nur dann Quadrate, wenn $k = p$ ist. Bei den letzteren gilt für die Fläche F wegen (3), (4) und (5) mit $v \neq 0$:

$$F = 4\frac{k}{p}\sqrt{4k^2p^2 + (v^2 - k^2 + p^2)^2} \geqq 8k^2 . \tag{6}$$

d) Da nach b) die Mittelpunkte aller auf die vorgeschriebene Weise eingeschriebenen Rhomben auf den Geraden $v^2 = k^2 - p^2$ liegen, so folgt schliesslich: *Für* $k > p$ *gibt es genau zwei reelle Quadrate mit den Mittelpunkten* $\{(4k^2 - p^2)/2p\,,\ \pm\sqrt{k^2 - p^2}\}$. *Ihre Fläche ist* $8k^2$ *und bildet das Minimum der Rechtecksflächen.* A. STOLL, Zürich.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), F. GOLDNER (London), L. KIEFFER (Luxemburg), R. LAUFFER (Graz) (2 Lösungen).

Neue Aufgaben

164. Calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty \operatorname{arc\,tg} a x \operatorname{arc\,tg} b x \frac{dx}{x^2} . \qquad (a \geqq 0, b \geqq 0)$$

H. BREMEKAMP, Delft.

165. Man beweise: Für $(a, n) = 1$ ist

$$x \equiv a - 12\sum_{k=1}^{n-1} k\left[\frac{ka}{n}\right] \pmod{n}$$

Lösung der Kongruenz $ax \equiv 1 \pmod{n}$. B. VAN DER POL, Genf.

166. Von einem Punkte P in der Ebene eines Dreiecks (A_i) fälle man die Lote auf die Seiten des Dreiecks. Ihre Fusspunkte bilden ein Dreieck, dessen Fläche F eine Funktion von P ist. Man zeige:

a) Der geometrische Ort der Punkte P, deren Fusspunktsdreiecke nach Grösse und Sinn gleiche Fläche haben, ist ein zumUmkreis von (A_i) konzentrischer Kreis.

b) Der geometrische Ort der Schwerpunkte der Fusspunktsdreiecke gleicher Fläche ist eine Ellipse um den Schwerpunkt von (A_i) als Mittelpunkt.

c) Die Ellipsen von b) sind, als Funktion des Parameters F, homothetisch, und ihre Achsen sind parallel zu dem Achsenkreuz $k(e)$, welches nach Aufgabe 148.4 dem Dreieck (A_i) zugeordnet ist (Winkelhalbierende zwischen der an einer der Dreiecksseiten gespiegelten Euler-Geraden und der Verbindung des Umkreismittelpunktes mit der Gegenecke jener Seite). A. STOLL, Zürich.

167. Es sei k eine geschlossene konvexe Kurve mit stetiger Tangente und Krümmung. Auf der Normalen jedes Punktes P von k wird von P aus nach aussen das λ-fache des Krümmungsradius in P abgetragen. Es entsteht eine spezielle «begleitende» Kurve von k. Ist B die Fläche der begleitenden Kurve, K diejenige von k und E die Fläche der Evolute von k, so gilt die Formel

$$B = (\lambda + 1)^2 K + \lambda (\lambda + 2) E .$$

E. TROST, Zürich.

Literaturüberschau

Mémorial des Sciences mathématiques (Gauthier-Villars, Paris):

Fasc. C. N. W. MC LACHLAN et P. HUMBERT, *Formulaire pour le Calcul symbolique*, Deuxième édition. (68 Seiten.) 1950.

Fasc. CXIII. N. W. MCLACHLAN, P. HUMBERT et L. POLI, *Supplément au Formulaire pour le Calcul symbolique.* (62 Seiten.) 1950.

Fasc. CXIV. M. KY FAN, *Les Fonctions définies-positives et les Fonctions complètement monotones.* (48 Seiten.) 1950.

Fasc. CXV. A. CHARRUEAU, *Sur des congruences de droites ou de courbes et sur une transformation de contact liée à ces congruences.* (72 Seiten.) 1950.

Fasc. CXVI. T. LEVI-CIVITA, *Le Problème des n corps en relativité générale.* (111 Seiten.) 1950.

Neuauflagen (Gauthier-Villars, Paris):

E. PICARD: *Leçons sur quelques équations fonctionnelles avec des applications à divers problèmes d'Analyse et de Physique mathématique.* (187 Seiten.) 1950.

Hier sei daran erinnert, dass man im ersten Kapitel eine sehr schöne Analyse des Problems der Kräftezusammensetzung und eine Darstellung der nichteuklidischen Trigonometrie findet.

E. GALOIS, *Œuvres mathémathiques suivies d'une notice sur E. Galois et la théorie des équations algébriques par* G. VERRIEST. (64 und 57 Seiten.) 1951.

Nach einer kurzen Lebensbeschreibung erläutert G. VERRIEST in durchweg elementarer Art den Grundgedanken der Galoisschen Gleichungstheorie.

Folgende Neuauflagen der bestbekannten Bände der *Sammlung Göschen* (Walter de Gruyter & Co., Berlin) sind eingetroffen:

Band 920. G. HOHEISEL, *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Vierte, neubearbeitete Auflage. (129 Seiten) 1951..

Band 931. H. HASSE, *Höhere Algebra.* Erster Teil: *Lineare Gleichungen.* Dritte verbesserte Auflage. (152 Seiten.) 1951.

Band 932. H. HASSE, *Höhere Algebra.* Zweiter Teil: *Gleichungen höheren Grades.* Dritte verbesserte Auflage. (158 Seiten.) 1951.

H. BIERI: *Geometrie.* Heft 10 der Sammlung «Lebendiges Wissen». Bubenbergverlag AG., Bern 1951. 56 Seiten.

Im Sinne der Sammlung werden die einfachsten geometrischen Begriffe und Lehrsätze in sorgfältig durchdachten Bildern (mehrfarbige Zeichnungen) mit knappem Text vorgeführt. Der Verfasser schreibt in der Einführung: «Die vorliegende Arbeit soll kein Lehrbuch sein. Vielmehr wird der ausgewählte Stoff in freier Weise gemäss den leitenden Gesichtspunkten gruppiert, welche der elementaren Geometrie das Gepräge geben.» Für den Lehrer der elementaren Geometrie, in erster Linie auf der Stufe der Sekundarschule, kann das vorliegende Heft durch seine schönen Zeichnungen manche Anregung bringen. *L. Locher-Ernst.*