Zerlegungsgleichheit ebener Polygone

Autor(en): **Hadwiger, H. / Glur, P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **6 (1951)**

Heft 5

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-15580

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

El. Math. Band VI Nr. 5 Seiten 97–120 Basel, 15. September 1951

Zerlegungsgleichheit ebener Polygone

I. Zwei Polygone der euklidischen Ebene heißen nach einer bekannten klassischen Definition *zerlegungsgleich*, wenn sie sich in paarweise kongruente Teilpolygone zerlegen lassen[1]). Offenbar weisen zerlegungsgleiche Polygone gleichen Flächeninhalt auf. Andererseits gilt der geläufige, für die Elementargeometrie der Ebene fundamentale Satz, daß inhaltsgleiche Polygone stets zerlegungsgleich sind. Diese Tatsache wurde erstmals vor mehr als hundert Jahren durch W. Bolyai und P. Gerwien nachgewiesen[2]). Mit Figur 1 sind Zerlegungen eines Quadrates und eines inhaltsgleichen gleichseitigen Dreiecks gegeben, welche die Zerlegungsgleichheit der beiden Figuren realisieren.

Nach dem obenerwähnten Sachverhalt ist die Inhaltsgleichheit zweier Polygone eine notwendige und hinreichende Bedingung für deren Zerlegungsgleichheit.

Man kann sich nun fragen, ob sich dieser Zerlegungssatz insofern verschärfen läßt, als man für die Teilpolygone mehr fordert als eine bestehende Kongruenz. Die nächstliegende wesentlich stärkere Bedingung wäre etwa, Translationsgleichheit zu verlangen. Hier zeigt sich indessen bald, daß die Bedingung der Inhaltsgleichheit keineswegs mehr ausreicht, um eine solche *translative Zerlegungsgleichheit* zu garantieren. So sind beispielsweise Quadrat und inhaltsgleiches gleichseitiges Dreieck gewiß nicht translativ zerlegungsgleich.

Die Abklärung der Frage nach der translativen Zerlegungsgleichheit zweier Polygone ist eines der Hauptziele der vorliegenden Arbeit. Im Abschnitt V wird die Forderung der Inhaltsgleichheit durch Adjunktion weiterer Bedingungen, welche sich auf Längen und Richtungen der Randstrecken beziehen, zu einem notwendigen und hinreichenden System ergänzt.

Um zu einer eventuell doch bestehenden Verschärfung des klassischen Zerlegungssatzes zu gelangen, muß demnach die Bedingung der Translationsgleichheit der Teilpolygone wieder abgeschwächt werden. Es ist nun immerhin etwas erstaunlich, daß der gewünschte Erfolg bereits bei einer geringfügigen Modifikation eintritt.

Während sich die translative Zerlegungsgleichheit dadurch definieren läßt, daß sich beide Polygone aus Teilpolygonen zusammensetzen lassen, welche nur durch

[1]) Für eine genaue Formulierung der Begriffe des Polygons und der Zerlegung vgl. den Schluß von Abschnitt I.

[2]) Selbstverständlich steht der Begriff der Zerlegungsgleichheit in enger Beziehung zu demjenigen der Inhaltsgleichheit. Die sich hier ergebenden Fragen, welche längst allseitig abgeklärt sind, brauchen in dieser Arbeit nicht weiter erörtert zu werden, da wir den Standpunkt einzunehmen haben, daß die Lehre vom Flächeninhalt polygonaler Bereiche zur Verfügung stehe. Über die Problematik vgl. den Enzyklopädieartikel von M. Zacharias (III, AB 9, Nr. 8, S. 917).

eine Translation in der Ebene auseinander hervorgehen, definieren wir neu die *spiegelergänzte translative Zerlegungsgleichheit* dadurch, daß wir außer den Translationen noch eine Spiegelung an einem festen Punkt der Ebene zulassen. Im Abschnitt III werden wir beweisen, daß die Inhaltsgleichheit eine notwendige und hinreichende Bedingung für die spiegelergänzte translative Zerlegungsgleichheit zweier Polygone darstellt. Damit haben wir ein weiteres Hauptziel, eine wesentliche Verschärfung des klassischen Zerlegungssatzes für Polygone, erreicht.

Unsere Betrachtungen beziehen sich ausnahmslos auf die euklidische Ebene E. Hier verstehen wir unter einem Polygon die Vereinigungsmenge endlich vieler abgeschlossener Dreiecke. Dabei unterscheiden wir gelegentlich zwischen eigentlichen Dreiecken mit inneren Punkten und demnach positivem Flächeninhalt und uneigentlichen oder entarteten Dreiecken (Strecken und Punkte) mit dem Flächeninhalt Null. Sinngemäß sprechen wir von einem eigentlichen Polygon, wenn sich dieses als Vereinigungsmenge endlich vieler eigentlicher Dreiecke darstellen läßt.

Unter einer endlichen Zerlegung eines Polygons A in die Teilpolygone A_ν, geschrieben

$$A = \sum_1^n A_\nu ,$$

verstehen wir eine Darstellung von A als Vereinigungsmenge der endlich vielen Polygone $A_1, A_2, \ldots, A_n$, wobei die verschiedenen A_ν paarweise keine inneren Punkte, demnach also keine eigentlichen Bestandteile gemeinsam haben sollen[1]).

Der Durchschnitt AB zweier Polygone A und B bedeute dasjenige Polygon, welches aus den durch A und B gemeinsam überdeckten Punkten von E besteht. Falls A und B keine Punkte gemeinsam haben, ist das Durchschnittspolygon AB leer, geschrieben $AB = \Lambda$. Das leere Polygon Λ wird in gewissen Ausführungen wesentlich zur formalen Vereinfachung der Schreibweise beitragen.

II. Es bezeichne t eine Translation der Ebene E. Dann bedeute $t(A)$ dasjenige Polygon, welches aus dem Polygon A nach Ausführung der Translation t hervorgeht.

Zwei Polygone A und B, für welche eine Translation t der Eigenschaft $B = t(A)$ existiert, heißen T-gleich (translationsgleich), geschrieben $A \approxeq B$.

Definition 1. Zwei Polygone A und B heißen T-*zerlegungsgleich (translativ zerlegungsgleich), geschrieben $A \approx B$, falls simultan zwei endliche Zerlegungen*

$$A = \sum_1^n A_\nu \qquad \text{und} \qquad B = \sum_1^n B_\nu$$

existieren, so daß gilt $A_\nu \approxeq B_\nu$ für alle $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

Insbesondere gilt also mit $A \approxeq B$ auch $A \approx B$.

Die T-Zerlegungsgleichheit besitzt — wie übrigens auch die T-Gleichheit — die Grundeigenschaften einer Äquivalenz. Es gelten die folgenden Gesetze:

Es ist	$A \approx A$					(Reflexivität),	(1)
aus	$A \approx B$	folgt	$B \approx A$			(Symmetrie),	(2)
aus	$A \approx B$	und	$B \approx C$	folgt	$A \approx C$	(Transitivität).	(3)

[1]) In der vorliegenden Arbeit wird die Schreibweise $A + B$ ausschließlich im Sinne einer Zerlegung verwendet, bei welcher also A und B keine inneren Punkte gemeinsam haben sollen; im Gegensatz zum allgemeineren mengentheoretischen Begriff der Vereinigungsmenge, bei welchem diese Nebenbedingung dahinfällt.

Die Eigenschaften der Reflexivität und Symmetrie sind trivial verifizierbar, wir begnügen uns deshalb mit dem Nachweis der Transitivität:

Nach den Voraussetzungen hat man

$$A = \sum_1^n A_\nu, \quad B = \sum_1^n B_\nu, \quad B = \sum_1^m \bar{\bar{B}}_\mu, \quad C = \sum_1^m C_\mu$$

mit

$$B_\nu = t_\nu(A_\nu) \quad \text{und} \quad C_\mu = \bar{t}_\mu(\bar{\bar{B}}_\mu)$$

für geeignete Translationen t_ν und $\bar{t}_\mu$. Bildet man

$$B_{\nu\mu} = B_\nu \bar{\bar{B}}_\mu, \quad A_{\nu\mu} = t_\nu^{-1}(B_{\nu\mu}) \quad \text{und} \quad C_{\nu\mu} = \bar{t}_\mu(B_{\nu\mu}),$$

wobei t_ν^{-1} die zu t_ν inverse Translation bedeute, so folgt

$$A = \sum_1^n \sum_1^m A_{\nu\mu} \quad \text{und} \quad C = \sum_1^n \sum_1^m C_{\nu\mu} \quad \text{mit} \quad C_{\nu\mu} = \bar{t}_\mu t_\nu(A_{\nu\mu}),$$

das heißt $A \approx C$, was zu beweisen war.

In den folgenden Ausführungen wird die Transitivität der T-Zerlegungsgleichheit fortwährend gebraucht und, um beständige Wiederholungen zu vermeiden, stets stillschweigend verwendet.

Satz 1. Ein eigentliches Rechteck R und ein Parallelogramm P gleich langer und parallelliegender Basis und gleicher Höhe sind T-*zerlegungsgleich.*

Beweis: Es sei a die gemeinsame Länge der parallelliegenden Basen, p die Länge der Normalprojektion der Schenkel von P auf die Basislinie.

a) $p \leqq a$: durch Figur 2 wird hier $R \approx P$ in einfachster Weise nachgewiesen.

b) $p > a$: nach Figur 3 erhält man ein Parallelogramm $P' \approx P$ gleicher Art mit $p' = p - a$. Durch endlichfache Anwendung dieses Verfahrens erhält man schließlich ein Parallelogramm $P^{(k)} \approx P$ mit $p^{(k)} < a$.

Es folgt der wichtige

Satz 2. Zwei inhaltsgleiche eigentliche Rechtecke R und R' sind stets T-*zerlegungsgleich.*

Beweis: Wie eine einfache elementargeometrische Betrachtungsweise lehrt, existiert stets eine Gerade g, auf welcher die Normalprojektionen geeigneter Seiten a und a' von R und R' gleiche Länge aufweisen. Es folgt dann (vgl. Figur 4) mit Satz 1 leicht

$$R \approx P \approx R_1 \approx R_1' \approx P' \approx R'.$$

Ein Rechteckspolygon bedeute ein Polygon, das sich in endlich viele, nicht notwendig parallel gelagerte Rechtecke zerlegen läßt.

Dann gilt

Satz 3. Zwei inhaltsgleiche eigentliche Rechteckspolygone sind stets T-*zerlegungsgleich.*

Beweis: Es genügt, zu zeigen, daß $A \approx Q$ gilt für ein eigentliches Rechteckspolygon A und ein inhaltsgleiches Quadrat Q. Dazu zerlege man Q streifenförmig in Rechtecke, welche einzeln mit den Rechtecken, in welche A sich zerlegen läßt, inhalts-

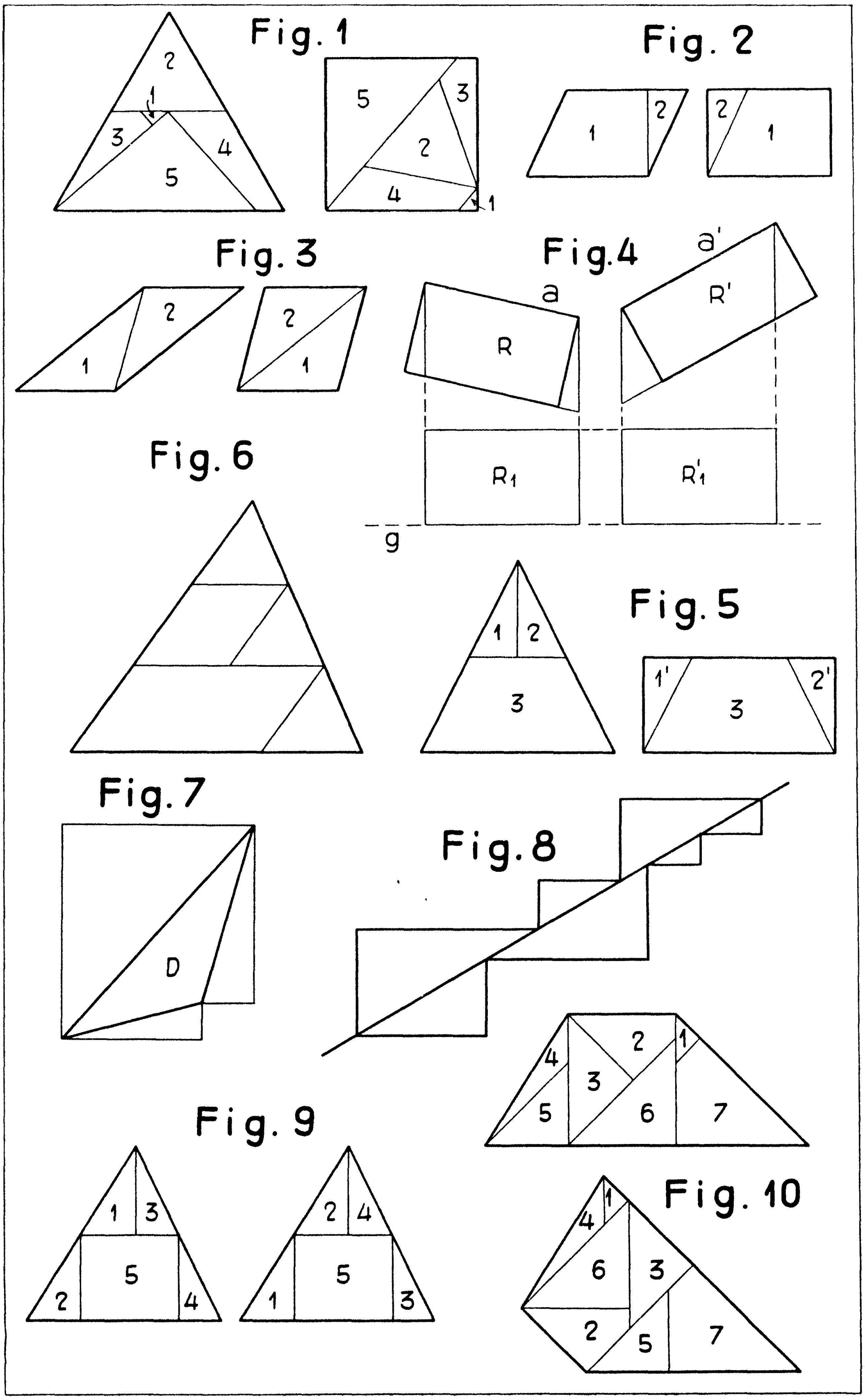


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
a
a'
R
R'
R1
R'1
g
Fig. 5
1'
2'
Fig. 6
Fig. 7
D
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10

gleich sind: $A = \sum_1^n R_\nu$, $Q = \sum_1^n R'_\nu$. Es folgt dann nach Satz 2 $R_\nu \approx R'_\nu$ und damit $A \approx Q$.

Die Frage nach der T-Zerlegungsgleichheit allgemeiner gestalteter Polygone wird erst im Abschnitt V beantwortet. Dort werden die obigen Sätze bei der Aufstellung notwendiger und hinreichender Kriterien für T-Zerlegungsgleichheit zweier Polygone eine wichtige Schlüsselstellung einnehmen. Bis dahin begnügen wir uns mit der trivialen *Feststellung*, daß T-zerlegungsgleiche Polygone notwendig gleichen Flächeninhalt aufweisen.

III. Es bedeute $s(A)$ dasjenige Polygon, welches aus dem Polygon A hervorgeht durch eine Spiegelung an einem fest gewählten Ursprung O der Ebene E.

Die Operation $s(A)$ läßt sich offenbar auch als Drehung von A um den Winkel π um O interpretieren; es handelt sich also insbesondere um eine eigentliche Bewegung.

Zwei Polygone A und B, für welche entweder $A \approxeq B$ oder dann $A \approxeq s(B)$ gilt, heißen ST-gleich (spiegelergänzt translationsgleich), geschrieben $A \simeq B$.

Definition 2. Zwei Polygone A und B heißen ST-*zerlegungsgleich (spiegelergänzt translativ zerlegungsgleich), geschrieben $A \sim B$, falls simultan zwei endliche Zerlegungen*

$$A = \sum_1^n A_\nu \quad \text{und} \quad B = \sum_1^n B_\nu$$

existieren, so daß gilt $A_\nu \simeq B_\nu$ für alle $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

Insbesondere gilt also mit $A \simeq B$ auch $A \sim B$.

Die ST-Zerlegungsgleichheit besitzt – wie übrigens auch die ST-Gleichheit – die Grundeigenschaften einer Äquivalenz. Es gelten die folgenden Gesetze:

Es ist	$A \sim A$	(Reflexivität),	(1′)
aus	$A \sim B$ folgt $B \sim A$	(Symmetrie),	(2′)
aus	$A \sim B$ und $B \sim C$ folgt $A \sim C$	(Transitivität).	(3′)

Aus $A \approx B$ folgt zudem $A \sim B$, eine Relation, welche wir im folgenden stets stillschweigend verwenden werden.

Es gilt nun:

Satz 4. Ein eigentliches Dreieck D ist mit einem inhaltsgleichen Rechteck R stets ST-*zerlegungsgleich.*

Beweis: Figur 5 zeigt, daß für ein Dreieck D und ein von D abhängiges Rechteck R' stets $D \sim R'$ gilt. Für ein beliebiges mit D, also auch mit R' inhaltsgleiches eigentliches Rechteck R gilt aber nach Satz 2 $R' \approx R$, und es folgt $D \sim R$.

Es ergibt sich nun:

Satz 5. Zwei inhaltsgleiche eigentliche Polygone sind stets ST-*zerlegungsgleich.*

Beweis: Es genügt, zu zeigen, daß ein beliebiges eigentliches Polygon A mit einem inhaltsgleichen Quadrat Q ST-zerlegungsgleich ist. Dazu zerlege man A in Dreiecke D_ν und Q streifenförmig in Rechtecke R_ν, welche einzeln mit den D_ν inhaltsgleich sind: $A = \sum_1^n D_\nu$, $Q = \sum_1^n R_\nu$. Es folgt nach Satz 4 $D_\nu \sim R_\nu$ und damit $A \sim Q$.

Zusammen mit der trivialen Feststellung, daß ST-zerlegungsgleiche Poygone notwendig denselben Flächeninhalt aufweisen, ergibt sich nun als *erstes Hauptergebnis* der vorliegenden Arbeit:

Kriterium ST. *Notwendig und hinreichend für* ST-*Zerlegungsgleichheit zweier eigentlichen Polygone ist die Gleichheit ihrer Flächeninhalte.*

Das Kriterium ST bzw. Satz 5 stellt also die in der Einleitung in Aussicht gestellte Verschärfung des klassischen Zerlegungssatzes dar.

IV. Für die im folgenden angestrebte Aufstellung notwendiger und hinreichender Kriterien für T-Zerlegungsgleichheit benötigen wir noch

Satz 6. Es seien A, B, C und D eigentliche Polygone. Dann folgt aus $A + C \approx B + D$ und $C \approx D$ auch $A \approx B$.

Satz 6 sagt also mit sinngemäßer Deutung des Begriffes der Ergänzungsgleichheit aus: T-ergänzungsgleiche eigentliche Polygone sind auch T-zerlegungsgleich[1]).

Beweis: Es bezeichne λA für $\lambda > 0$ dasjenige Polygon, welches aus A nach Ausführung einer Ähnlichkeitsabbildung mit der linearen Vergrößerung λ und dem Ursprung O von E als Ähnlichkeitszentrum hervorgeht.

Für eine natürliche Zahl n existiert dann ein Quadrat Q, so daß

$$A \approx Q + \sum_{1}^{n} A_\nu \qquad \text{mit} \qquad A_\nu \approxeq \frac{1}{n} A \tag{a}$$

gilt. Dies läßt sich zunächst für ein beliebiges eigentliches Dreieck D leicht einsehen, indem man D durch $n-1$ basisparallele äquidistante Geraden in ein Dreieck $D' \approxeq D/n$ und $n-1$ Streifen zerlegt. Zerlegt man weiter jeden Streifen in ein Parallelogramm und in ein Dreieck, welches mit D' T-gleich ist, so ergibt sich schließlich eine Zerlegung von D in n Dreiecke und $n-1$ Parallelogramme. Figur 6 zeigt diese Zerlegung für $n = 3$. Die n Dreiecke sind einzeln mit D/n T-gleich, während die Vereinigungsmenge der $n-1$ Parallelogramme nach den Sätzen 1 und 3 mit einem Quadrat T-zerlegungsgleich ist.

Für ein beliebiges eigentliches Polygon A erhält man nun (a), indem man A in Dreiecke zerlegt und die Relation (a) für jedes einzelne Dreieck herstellt; addiert man dann alle Relationen, so ergibt sich (a) für das gesamte Polygon A unter nochmaliger Verwendung von Satz 3.

Wählt man nun n groß genug, so lassen sich n verschiedene Polygone C_ν der Eigenschaft $C \approxeq C/n$ aus Q herausschneiden. (In der Tat: Wählt man $n = m^2$, so läßt sich Q, das mit wachsendem n nur größer wird, in n Teilquadrate zerlegen. Während nun die Seitenlängen dieser Teilquadrate mit wachsendem m wie $1/m$ abnehmen, nehmen die Durchmesser der C_ν wie $1/m^2$ ab, so daß sich schließlich die C_ν aus den einzelnen Teilquadraten herausschneiden lassen.) Bezeichnet man mit P das Restpolygon, so hat man

$$Q = P + \sum_{1}^{n} C_\nu \tag{b}$$

und zusammen mit (a)

$$A \approx P + \sum_{1}^{n} (A_\nu + C_\nu). \tag{c}$$

[1]) Dieser Sachverhalt liegt tiefer, als es auf den ersten Blick erscheint. Es ist sehr fraglich, ob sich Satz 6 allgemein allein aus der Gruppeneigenschaft der Translationen herleiten läßt. Die folgende Beweiskonstruktion stützt sich bereits auf Satz 3 und ist einer Idee nachgebildet, welche J.-P. SYDLER (Comm. Math. Helv. *16*, 266–273 [1943/44]) zur Begründung des entsprechenden Satzes für die Zerlegungsgleichheit im klassischen Sinne gedient hat.

Im Hinblick auf die Voraussetzungen des Satzes findet man leicht $A_\nu + C_\nu \approx B_\nu + D_\nu$ und $C_\nu \approx D_\nu$ mit $B_\nu \approxeq B/n$ und $D_\nu \approx D/n$. Es ergibt sich für (c):

$$A \approx P + \sum_1^n (B_\nu + D_\nu) \approx P + \sum_1^n (B_\nu + C_\nu) \approx \left[P + \sum_1^n C_\nu\right] + \sum_1^n B_\nu,$$

unter Verwendung von (b):

$$A \approx Q + \sum_1^n B_\nu. \tag{d}$$

Andererseits gilt aus denselben Gründen wie für (a) auch

$$B \approx Q' + \sum_1^n B_\nu. \tag{a'}$$

Endlich ergibt eine einfache Bilanz der Flächeninhalte von A, B, C und D im Hinblick auf die Feststellung am Schluß des Abschnittes II die Inhaltsgleichheit der beiden Quadrate Q und Q', woraus nach Satz 2 $Q \approx Q'$ folgt. Aus (a′) und (d) erhält man schließlich $A \approx B$, was zu beweisen war.

V. Die Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen für T-Zerlegungsgleichheit hängt eng zusammen mit dem Problem der translationsinvarianten und einfach-additiven Polygonfunktionale.

Ein Funktional φ, welches jedem Polygon A eindeutig einen Wert $\varphi(A)$ zuordnet, ist als solches charakterisiert durch die Eigenschaften

$$\varphi(A) = \varphi(A') \quad \text{für} \quad A \approxeq A' \quad \text{(Translationsinvarianz)}, \tag{4}$$

$$\varphi\left(\sum_1^n A_\nu\right) = \sum_1^n \varphi(A_\nu) \qquad \text{(Einfach-Additivität)}. \tag{5}$$

Ein solches Funktional ist offenbar durch den Flächeninhalt $F(A)$ gegeben.

Weniger geläufig dürften die folgenden Funktionale sein, welche sich aus Längen und Richtungswinkeln der Randstrecken eines Polygons zusammensetzen.

Zur Bildung solcher Funktionale orientieren wir alle Randstrecken eines eigentlichen Polygons derart, daß beim Durchlaufen derselben das Innere des Polygons zur Linken liegt. Die Richtung eines Randstreckenvektors charakterisieren wir durch den Winkel, welchen dieser mit einem fest gewählten Nullvektor der Ebene E, im positiven Drehsinn gemessen, einschließt; er werde Richtungswinkel der Randstrecke genannt.

Es bezeichne jetzt $S_\tau(A)$ die Summe der Längen derjenigen Randstrecken von A, welche den Richtungswinkel τ aufweisen. Da ein Polygon nur endlich viele Randstrecken positiver Länge aufweist, ist $S_\tau(A)$ nur für endlich viele Winkel τ von Null verschieden.

Setzt man jetzt

$$L_\tau(A) = S_\tau(A) - S_{\tau+\pi}(A), \tag{6}$$

so läßt sich leicht bestätigen, daß durch $L_\tau(A)$ ebenfalls ein translationsinvariantes und einfach-additives Polygonfunktional gegeben ist.

Es gilt stets

$$L_{\tau+\pi}(A) = -L_\tau(A), \tag{7}$$

das heißt: für ein festes Polygon A ist $L_\tau(A)$ eine ungerade Funktion des Winkelparameters τ[1]).

$F(A)$ und $L(A)$ sind unter gewissen weiteren Bedingungen, auf die wir hier nicht näher eingehen wollen, die einzig möglichen translationsinvarianten und einfach-additiven Polygonfunktionale[2]).

Unmittelbar aus der Definition der T-Zerlegungsgleichheit und aus der Translationsinvarianz und Einfach-Additivität der Funktionale $F(A)$ und $L(A)$ ergibt sich

Satz 7. Für zwei T-*zerlegungsgleiche Polygone A und B gilt notwendig $F(A) = F(B)$ und $L_\tau(A) = L_\tau(B)$ für alle $0 \leqq \tau < 2\pi$.*

Zum Nachweis, daß auch die Umkehrung dieses Satzes richtig ist, formulieren wir vorbereitend

Satz 8. Ein eigentliches Polygon A, für welches $L_\tau(A) = 0$ für alle $0 \leqq \tau < 2\pi$ gilt, ist T-*zerlegungsgleich mit einem inhaltsgleichen Quadrat.*

Wegen (7) würde es genügen, die Bedingung nur für das Winkelintervall $0 \leqq \tau < \pi$ zu stellen.

Beweis: Wir legen durch die Richtungswinkel τ_0 und $\tau_0 + \pi/2$ in der Ebene E zwei Normalrichtungen fest und bezeichnen ein eigentliches rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten zu diesen Normalrichtungen parallel sind, als Elementardreieck Δ. Die Hypotenuse eines Elementardreiecks hat demnach einen Richtungswinkel, welcher sowohl von τ_0 als auch von $\tau_0 + \pi/2$ verschieden ist.

Man zerlege nun A in eigentliche Dreiecke und verschiebe diese in der Ebene E so weit auseinander, daß sich die folgenden Konstruktionen gegenseitig nicht stören. Man hat dann, wenn man die verschobenen Dreiecke mit D_ν bezeichnet,

$$A \approx \sum_1^n D_\nu .$$

Wie Figur 7 zeigt, läßt sich jedes dieser Dreiecke D_ν durch Anfügen von höchstens drei Elementardreiecken Δ_μ zu einem Rechteckspolygon ergänzen. Es folgt

$$A + \sum_1^m \Delta_\mu \approx \sum_1^n D_\nu + \sum_1^m \Delta_\mu \approx Q', \tag{a}$$

worin Q' ein mit der Vereinigungsmenge aller Rechteckspolygone inhaltsgleiches Quadrat bedeutet. Es ist offenbar $L_\tau(Q) = 0$, und wegen der Voraussetzung $L_\tau(A) = 0$ gilt

$$L_\tau\left(\sum_1^m \Delta_\mu\right) = 0 \qquad \text{für alle} \qquad 0 \leqq \tau < 2\pi .$$

Es bezeichne nun Δ_{μ_τ} diejenigen Dreiecke Δ_μ, deren Hypotenusen den Richtungswinkel τ aufweisen, und es sei $h(\tau)$ die Summe der Längen dieser Hypotenusen. Für

$$\tau \neq \tau_0, \qquad \tau \neq \tau_0 + \frac{\pi}{2}$$

---

[1]) Diese Eigenschaft gestattet die eindeutige Bildung des Funktionals $L_\tau(A)$ auch für uneigentliche Polygone A: uneigentliche Bestandteile liefern danach den Beitrag Null.

[2]) Vgl. H. HADWIGER, *Über beschränkte additive Funktionale konvexer Polygone*, Publicationes Mathematicae *1* (Debrecen 1949).

ist dann

$$L_\tau\left(\sum_1^m \Delta_\mu\right) = h(\tau) - h\,(\tau + \pi) = 0.$$

Wir betrachten nun einen Winkel τ, für welchen $h(\tau) > 0$ gilt, und schieben alle Dreiecke Δ_{μ_τ} derart aneinander, daß ihre Hypotenusen auf ein und derselben Geraden liegen. Es entsteht so eine Dreieckskolonne der Rückenlänge $h(\tau)$. Ebenso verfahren wir mit den Dreiecken $\Delta_{\mu_{\tau+\pi}}$. Wegen $h(\tau + \pi) = h(\tau)$ lassen sich diese beiden Dreieckskolonnen zu einem Rechteckspolygon R_τ zusammenschieben (vgl. Fig. 8). Man hat also

$$\Sigma\,\Delta_{\mu_\tau} + \Sigma\,\Delta_{\mu_{\tau+\pi}} \approx R_\tau\,,$$

und es folgt durch Addition dieser Relationen für alle $0 \leqq \tau < 2\,\pi$, welche ein $h(\tau) > 0$ liefern,

$$\sum_1^m \Delta_\mu \approx Q'', \tag{b}$$

worin Q'' ein mit der Vereinigungsmenge aller R_ν inhaltsgleiches Quadrat bedeutet. Zusammen mit (a) erhält man

$$A + Q'' \approx Q'. \tag{c}$$

Hier ist $F(A) = F(Q') - F(Q'') > 0$, und für ein Quadrat Q mit dem Flächeninhalt $F(Q) = F(Q') - F(Q'')$ gilt nach Satz 3 $Q' \approx Q + Q''$, was in (c)

$$A + Q'' \approx Q + Q''$$

liefert. Nach Satz 6 schließt man daraus $A \approx Q$, was zu beweisen war.

Wir gelangen nun zum

Satz 9. Zwei eigentliche Polygone A und B, welche den Bedingungen $F(A) = F(B)$ und $L_\tau(A) = L_\tau(B)$ für alle $0 \leqq \tau < 2\,\pi$ genügen, sind T-*zerlegungsgleich.*

Wegen (7) würde es auch hier genügen, die Bedingungen nur für das Winkelintervall $0 \leqq \tau < \pi$ zu stellen.

Beweis: Man lege die Normalrichtungen τ_0 und $\tau_0 + \pi/2$ so fest, daß sowohl $L_{\tau_0}(A) = 0$ als auch $L_{\tau_0+\pi/2}(A) = 0$ gilt.

Wir betrachten nun einen Winkel τ, für welchen $L_\tau(A) \neq 0$ ausfällt. Es gibt dann ein Elementardreieck Δ^τ, für welches $L_\tau(\Delta^\tau) = -L_\tau(A)$ wird, nämlich das Elementardreieck mit der Hypotenusenlänge $|L_\tau(A)|$ und dem Hypotenusenrichtungswinkel τ bzw. $\tau + \pi$, je nachdem $L_\tau(A) < 0$ oder $L_\tau(A) > 0$ ist.

$L_\tau(A)$ ist nur für endlich viele Winkel τ des Intervalls $0 \leqq \tau < \pi$ von Null verschieden. Wir fügen die zugehörigen endlich vielen Dreiecke Δ^τ beiden Polygonen A und B zu und erhalten so die Polygone

$$A + \sum \Delta^\tau, \qquad B + \sum \Delta^\tau.$$

Es folgt zusammen mit den Voraussetzungen

$$F\left(A + \sum \Delta^\tau\right) = F\left(B + \sum \Delta^\tau\right),$$

$$L_\tau\left(A + \sum \Delta^\tau\right) = L_\tau\left(B + \sum \Delta^\tau\right) = 0.$$

Nach Satz 8 hat man also

$$A + \sum \Delta^\tau \approx Q \quad \text{und} \quad B + \sum \Delta^\tau \approx Q,$$

worin Q ein Quadrat mit dem Flächeninhalt $F(Q) = F(A + \Sigma \Delta^\tau) = F(B + \Sigma \Delta^\tau)$ bedeutet. Nach Satz 6 schließt man daraus $A \approx B$, was zu beweisen war.

Zusammen mit Satz 7 erhalten wir als *zweites Hauptergebnis* unserer Arbeit das *Kriterium* T. *Notwendig und hinreichend für die* T-*Zerlegungsgleichheit zweier eigentlichen Polygone A und B ist das Erfülltsein der Bedingungen $F(A) = F(B)$ und $L_\tau(A) = L_\tau(B)$ für alle $0 \leqq \tau < 2\pi$.*

Wegen (7) genügt es, die zweite Bedingung nur für das Winkelintervall $0 \leqq \tau < \pi$ zu stellen.

Besonders beachtenswert ist der Umstand, daß das Kriterium T nichtabzählbar viele Bedingungen enthält, daß aber für zwei beliebige, aber feste Polygone stets fast alle Bedingungen in trivialer Weise erfüllt sind.

Es bestätigt sich nun, daß ein Quadrat und ein inhaltsgleiches gleichseitiges Dreieck nicht T-zerlegungsgleich sein können, wie dies in der Einleitung erwähnt wurde.

Allgemeiner kann sogar festgestellt werden, daß zwei nicht T-gleiche Dreiecke auch nicht T-zerlegungsgleich sind, das heißt, es gibt zwischen Dreiecken überhaupt keine nichttriviale T-Zerlegungsgleichheit. Figur 9 veranschaulicht eine triviale T-Zerlegungsgleichheit zwischen zwei T-gleichen Dreiecken.

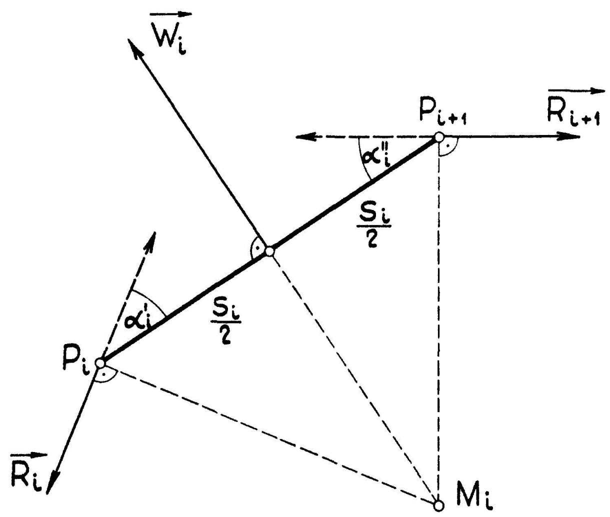
Dagegen zeigt Figur 10 eine nichttriviale T-Zerlegungsgleichheit zwischen Trapezen.

H. HADWIGER und P. GLUR, Bern.

Kleine Mitteilungen

I. *Polygone mit maximalem Flächeninhalt*

Der im Heft V/6 von Herrn VAN DER WAERDEN bewiesene Satz «*Unter allen n-Ecken mit gegebenen Seiten hat dasjenige den größten Flächeninhalt, das sich einem Kreise einbeschreiben läßt*», gestattet einen mit den einfachsten Begriffen der Statik arbeitenden



Plausibilitätsbeweis, der, wenn auch nicht mathematisch streng, so doch recht anschaulich ist und wohl jedem mit den Grundbegriffen der Trigonometrie und der Statik vertrauten Mittelschüler ohne weiteres einleuchten dürfte.

Wir denken uns einen auf dem horizontalen, glatten Boden verschiebbaren vertikalen, prismatischen Mantel mit gelenkig verbundenen Seitenflächen von vorgeschriebener