Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **6 (1951)**

Heft 3

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Hat eine Punktmenge M der Ebene die Eigenschaft, daß die mit einer festen Längeneinheit gemessene Distanz von zwei Punkten eine natürliche Zahl ist, und ist die Anzahl der Punkte unendlich, so liegen sämtliche Punkte auf derselben Geraden.

Der Satz gilt für jeden Raum endlicher Dimension. Der Beweis stützt sich auf den allgemeinen Satz von Bezout, der im Fall der Ebene besagt, daß die Anzahl der mit der richtigen Vielfachheit gezählten Schnittpunkte von zwei algebraischen Kurven m-ten bzw. n-ten Grades $m\,n$ beträgt. Obwohl nur die Endlichkeit der Schnittpunktsanzahl verwendet wird, sei darauf hingewiesen, daß man in der Ebene nur Schnittpunkte von Geraden zu betrachten hat.

Sind A und B zwei Punkte von M mit der Distanz d, so können die sich nicht auf der Geraden AB befindenden Punkte nur auf den d konfokalen Hyperbeln mit den Brennpunkten A und B und den Hauptachsen $2\,a = 0, 1, 2, \ldots, d-1$ liegen, wobei die Mittelsenkrechte von AB mitgerechnet ist. Da nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass jede beschränkte unendliche Punktmenge mindestens einen Häufungspunkt besitzt und sich die Punkte von M im Endlichen nicht häufen können, liegen nur endlich viele innerhalb eines Kreises mit endlichem Radius R um den Mittelpunkt von AB. Die übrigen liegen entweder auf der Geraden AB oder in endlich vielen, durch Parallele zu den Asymptoten gebildeten Streifen, deren Breite mit wachsendem R gegen Null strebt. Gibt es überhaupt einen außerhalb der Geraden AB liegenden Punkt C, so kann man auf analoge Weise mit den Brennpunkten B und C eine zweite Streifenschar konstruieren, die mit der ersten eine endliche Anzahl von parallelogrammförmigen Flächenstücken bestimmt. In diesen können nur endlich viele Punkte von M Platz finden. Somit liegen unendlich viele Punkte auf der Geraden AB. Da diese Gerade aber von den Streifen der zweiten Schar in endlich vielen Strecken geschnitten wird, führt die Annahme eines nicht auf der Geraden AB liegenden Punktes zu einem Widerspruch, womit der Satz bewiesen ist.

Für jede Dimensionszahl p erhebt sich nun die Frage nach der maximalen Anzahl N_p der Punkte mit ganzzahliger Entfernung, die nicht alle auf derselben Geraden liegen. Für die Ebene ist $N_p \geqq 4$, denn es gibt zum Beispiel folgende Vierecke $ORST$ mit ganzen Seiten und Diagonalen[1])

$$OR = (\lambda\,\mu - 1)^2, \quad OS = (\lambda + \mu)\,(\lambda\,\mu - 1), \quad OT = (\lambda + \mu)^2$$

$$ST = (\lambda + \mu)\,(\lambda\,\mu + \mu - \lambda + 1), \quad TR = (\lambda^2 - 1)\,(\mu^2 - 1) + 4\,\lambda\,\mu$$

$$RS = (\lambda\,\mu - 1)\,(\lambda\,\mu + \mu - \lambda + 1). \qquad (\lambda,\ \mu \text{ natürliche Zahlen.})$$

E. Trost.

Aufgaben

Aufgabe 86. Der Inkreisradius und die Ankreisradien eines rechtwinkligen Dreiecks sind dann und nur dann ganze Zahlen, wenn auch die Seiten ganzzahlig sind (pythagoreische Dreiecke). S. Joss (Bern.)

Lösung: Unter Verwendung der üblichen Bezeichnungen im Dreieck ergibt sich bei Berücksichtigung von $a^2 + b^2 = c^2$

$$r = \frac{F}{s} = \frac{a\,b}{a+b+c} = \frac{a\,b\,(a+b-c)}{2\,a\,b} = s - c.$$

Analog findet man $r_a = s - b$, $r_b = s - a$, $r_c = s$. Nun sind bei pythagoreischen Zahlentripeln entweder keine oder zwei der Zahlen ungerade, somit ist s ganz, und auch die Radien sind ganzzahlig. Wegen $a = r_a + r$, $b = r_b + r$, $c = r_a + r_b$ ergeben umgekehrt ganzzahlige Radien ganzzahlige Seiten. H. Debrunner (Lyß).

1) Nieuw. Tijdschr. Wiskunde *35*, 117 (1947).

Weitere Lösungen sandten H. FAEHNDRICH (Bern), H. FLORIAN (Graz), F. GOLDNER (London), L. KIEFFER (Luxemburg), R. LAUFFER (Graz), T. REICH (Glarus), W. ZULLIGER (Küsnacht).

Aufgabe 87. Par combien de zéros se termine le nombre 100! et quel est le dernier chiffre précédant ces zéros? H. BREMEKAMP (Delft, Hollande).

Lösung: Bekanntlich geht die Primzahl p in $n!$ mit dem Exponenten $\sum_{i=0}^{\infty}[n/p^i]$ auf, wo $[\alpha]$ die größte ganze Zahl $\leq \alpha$ bedeutet. Hieraus (oder auch direkt!) ergibt sich die Primzahlzerlegung

$$100! = 2^{97} \cdot 3^{48} \cdot 5^{24} \cdot 7^{16} \cdot 11^{9} \cdot 13^{7} \cdot 17^{5} \cdot 19^{5} \cdot 23^{4} \cdot 29^{3} \cdot 31^{3} \cdot 37^{2} \cdot 41^{2}$$

$$\times\ 43^{2} \cdot 47^{2} \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97.$$

Folglich endet $100! = N \cdot 10^{24}$ mit 24 Nullen. Betrachtet man die Primzahlpotenzen von N mod 10, so erkennt man, daß nur die Restklassen der Potenzen von 2, 3 und 7 zu bestimmen sind. Es ist $2^2 \equiv 4$, $2^3 \equiv 8$, $2^4 \equiv 6$, $2^5 \equiv 2$; $3^2 \equiv 9$, $3^3 \equiv 7$, $3^4 \equiv 1$, $3^5 \equiv 3$; $7^2 \equiv 9$, $7^3 \equiv 3$, $7^4 \equiv 1$, $7^5 \equiv 7$. Man kann somit die Exponenten mod 4 reduzieren und erhält $N \equiv 2 \cdot 3^2 \cdot 7^3 \equiv 4 \pmod{10}$. Den 24 Nullen geht also die Zahl 4 voraus. H. R. SPEICH (Zürich).

Wie der Aufgabensteller angibt, ist $N \equiv 64 \pmod{100}$. H. FAEHNDRICH (Bern) löst auch die entsprechende Aufgabe für 1000! und findet 249 Nullen und 2 als letzte vorangehende Ziffer.

Weitere Lösungen gingen ein von H. DEBRUNNER (Lyß), F. GOLDNER (London), L. KIEFFER (Luxemburg), R. LAUFFER (Graz), M. P. MARCHAL (Basel), A. MARET (Neuenburg), G. NEUWEILER (Olten).

Aufgabe 88. Soit AEF un triangle équilatéral inscrit dans un rectangle $ABCD$. Démontrer que l'aire du triangle ECF (E sur BC, F sur CD) est égale à la somme des aires des triangles ABE et AFD.

Généraliser ce théorème pour un polygone régulier quelconque.

La démonstration par la trigonométrie ou l'algèbre est simple. On désirerait une démonstration géométrique élémentaire. F. FIALA (Neuchâtel).

1re solution: Considérons les milieux M, N et O des côtés AE, EF et FA du triangle équilatéral. De $FM \perp AE$ et $EC \perp FC$ il suit $\sphericalangle FCM = \sphericalangle FEM = 60°$, donc le triangle DMC est équilatéral. De $\overline{MC} = \overline{DC} = \overline{AB}$ et $\overline{CN} = \overline{NM} = \overline{AM} = \overline{BM} = 0{,}5\,\overline{AE}$, on déduit que $\triangle MNC = \triangle AMB = 0{,}5\,\triangle ABE$, et de la même façon on trouve $\triangle ONC = 0{,}5\,\triangle ADF$.

De $MO \# NE$ on déduit que la somme des distances de M et O à NC est égale à la distance de E à NC. Multiplication par $0{,}5\,NC$ donne

$$\triangle MNC + \triangle ONC = \triangle NEC = 0{,}5\,\triangle FEC,$$

d'où résulte la propriété à démontrer. H. J. A. DUPARC (Amsterdam).

2. Lösung: Die gesuchte Verallgemeinerung kann folgendermaßen formuliert werden: Ist jede Seite eines regulären n-Ecks Diagonale eines Rechtecks, dessen Seiten zu einer gegebenen Richtung parallel und normal sind, dann haben zwei aufeinanderfolgende Rechtecke entweder nur eine Ecke gemein oder außerdem noch eine Grenzlinie. Im ersten Falle sollen ihre Flächen gleiches, im zweiten ungleiches Vorzeichen bekommen. Dann gilt: 1. Das Vorzeichen von einem der Rechtecke bestimmt eindeutig alle andern. 2. Die algebraische Summe aller n Rechtecksflächen ist Null.

Es seien s_1 und s_2 zwei aufeinanderfolgende Seiten des n-Ecks und E_{12} ihre gemeinsame Ecke. Ist A_1 die äußere und B_1 die innere Ecke des Rechtecks über s_1 dann sind A_1 und B_1 Gegenpunkte auf dem Kreis über s_1 als Durchmesser. Die Gerade A_1E_{12} bestimmt auf dem Kreis über s_2 als Durchmesser die nächste Ecke A_2, und ebenso bestimmt B_1E_{12} die Ecke B_2. A_2 und B_2 sind wieder Gegenecken. Liegt A_2 außen, so liegt B_2 innen, die beiden Rechtecke haben eine Grenzlinie gemein und bekommen verschiedenes Vorzeichen. Liegt aber A_2 innen und also B_2 außen, so haben die Rechtecke nur die Ecke E_{12} gemein und bekommen gleiches Vorzeichen.

F_{12} sei der zweite Schnittpunkt der beiden Kreise über s_1 und s_2. Er liegt mit den Polygonecken E_{n1} und E_{23} auf einer Geraden. Die vier Peripheriewinkel mit den Scheiteln E_{n1}, A_1, E_{23}, A_2 sind gleich groß, denn sie stehen über gleichen bzw. kongruenten Kreisbögen. Daher sind die Winkel $A_1F_{12}A_2$ und $E_{n1}E_{12}E_{23}$ gleich groß, und die Kreisbögen A_1E_{12} und $E_{12}A_2$, beide im positiven Drehsinn genommen, machen zusammen $(n-2)/n$ des Vollkreises aus.

Denkt man sich nun den Kreis über s_1 um E_{12} gedreht, bis er mit dem Kreis über s_2 zusammenfällt, und dreht dann diesen Doppelkreis um E_{23} bis zur Deckung mit dem Kreis über s_3, und so weiter, so erhält man durch diese Deckoperation einen einzigen Kreis mit der Polygonseite s als Durchmesser, auf dem die Punkte A_1 bis A_n die Ecken eines regulären n-Ecks bilden. A_{n+1} fällt nun mit A_1 zusammen, so daß das Rechteck dasselbe Vorzeichen bekommt wie beim Start. (Vor der Deckoperation kann A_{n+1} auch mit B_1 zusammenfallen statt mit A_1.)

Das nunmehrige n-Eck der Punkte A hat seinen Schwerpunkt wegen seiner Regularität im Kreismittelpunkt, also auf s, so daß die algebraische Summe der Abstände der Punkte A_i von den entsprechenden Seiten s_i verschwindet, und damit auch die fragliche Flächensumme.

Wenn n gerade ist, sind je zwei gegenüberliegende Rechtecke kongruent, so daß der obige Satz dann schon für jede Kette von $n/2$ aufeinanderfolgenden Rechtecken gilt. Für das Dreieck ist die Vorzeichenfrage trivial. A. STOLL (Zürich).

Der obige Satz kann auch folgendermaßen formuliert werden: Die Summe der Flächen der rechtwinkligen Dreiecke über den Seiten des regulären Polygons, deren Hypotenuse eine positive Steigung bezüglich der gegebenen Richtung hat, ist gleich der Summe der Flächen der Dreiecke, deren Hypotenuse eine negative Steigung bezüglich dieser Richtung hat.

Weitere Lösungen sandten (ohne Verallgemeinerung): F. GOLDNER (London), R. LAEMMEL (Zürich), R. LAUFFER (Graz), P. MULLENDER (Amstelveen, Holland), (mit Verallgemeinerung): J.-P. SYDLER (Zürich).

Aufgabe 89. Man beweise, daß die Koeffizienten der Tangensreihe

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

folgender nichtlinearer Rekursionsformel genügen:

$$(n-1)\, a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k}\, a_k \qquad (n > 1), \qquad a_1 = 1, \qquad a_2 = 0.$$

R. STETTLER (Bern).

Lösung: $y = f(x) = \operatorname{tg} x$ genügt der Differentialgleichung $y' = 1 + y^2$. Berechnet man für jede Seite die Potenzreihenentwicklung, so erhält man durch Vergleich der Koeffizienten die gesuchte Rekursionsformel. Man kann auch die aus der Differentialgleichung folgende Beziehung $y^{(n+1)} = d^n(y^2)/dx^n$ verwenden. Berechnet man die rechte Seite mit dem Leibnizschen Theorem und berücksichtigt, daß $a_n = f^{(n)}(0)/n!$, so gelangt man sofort zur Rekursionsformel. K. RIEDER (Riehen).

Weitere Lösungen gingen ein von C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), J. BINZ (Biel), H. DEBRUNNER (Lyß), H. FLORIAN (Graz), F. GOLDNER (London), R. LAUFFER (Graz). M. P. MARCHAL (Basel).

Aufgabe 90. Bei der Lösung einer Aufgabe aus der angewandten Mathematik ergab sich das folgende transzendente Gleichungssystem:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{y} (\operatorname{tgh} i\, x + 1) + z = a_i, \qquad (i = 1, 2, 4).$$

Man diskutiere die Lösungsmöglichkeit. E. ROTH-DESMEULES (Luzern).

Lösung: Aus den Gleichungen der Aufgabe ergibt sich mit dem Additionstheorem

$$\frac{\operatorname{tgh} 4\,x - \operatorname{tgh} 2\,x}{\operatorname{tgh} 2\,x - \operatorname{tgh} x} = \frac{\sinh 2\,x \cosh x}{\cosh 4\,x \sinh x} = \frac{2 \cosh^2 x}{\cosh 4\,x} = \frac{1 + \cosh 2\,x}{2 \cosh^2 2\,x - 1} = \frac{a_4 - a_2}{a_2 - a_1} = k$$

und damit die quadratische Gleichung

$$2\,k \cosh^2 2\,x - \cosh 2\,x - (k + 1) = 0.$$

Wegen $\cosh 2\,x \geqq 1$ muß gelten $\pm\sqrt{1 + 8\,k + 8\,k^2} \geqq 4\,k - 1$, woraus sich als Bedingung für die Lösbarkeit in endlichen Zahlen $\underline{0 < k \leqq 2}$ ergibt. Die Wurzel erhält das positive Zeichen. Ist x gefunden, so lassen sich y und z ohne weitere Beschränkung berechnen. F. GOLDNER (London).

Der Fall $a_1 = a_2 = a_4 = a$, der sich der Lösungsbedingung entzieht, läßt folgende uneigentlichen Lösungen zu: $x = 0$, y beliebig $\neq 0$, $z = a$; $x = y = 0$, $z = a - 0{,}5$; $x = y = \infty$, $z = a - 1$. Eine weitere Lösung sandte M. P. MARCHAL (Basel).

Aufgabe 91. w sei eine der Wallace-Geraden des Dreiecks ABC, V der Schwerpunkt ihrer Schnittpunkte mit den Dreieckseiten und v die Normale zu w durch V. Man beweise:

Die Hüllkurve der Geraden v ist eine Steinersche Hypozykloide, die in bezug auf den Schwerpunkt von ABC symmetrisch ist zur Hüllkurve der Wallace-Geraden.

A. STOLL (Zürich).

Lösung des Aufgabenstellers: H sei der Höhenschnittpunkt und F der Mittelpunkt des Feuerbach-Kreises von ABC. W sei ein Punkt des Umkreises und w die zugehörige Wallace-Gerade. Sie schneidet bekanntlich WH in der Mitte W_1, und diese liegt auf dem Feuerbach-Kreis. Ihr Gegenpunkt auf ihm sei W^1. WW^1 schneide die Euler-Gerade HF in S und die Parallele dazu durch W_1 in V_1. Offenbar ist $WV_1 = V_1S = SW^1$ und daher $2\,SF = V_1W_1$ und $2\,V_1W_1 = SH$. S ist also Schwerpunkt von ABC.

M_a, M_b, M_c seien die Mittelpunkte der Spiegelbilder des Umkreises in bezug auf BC, CA, AB. M_aM_b ist Mittelsenkrechte zu HC und umgekehrt; die vier Punkte bilden einen Rhombus. Es gibt drei solche Rhomben. Ihre Mittelpunkte bilden ein Dreieck, welches in bezug auf H homothetisch ist zu ABC im Verhältnis 1:2. Sein Schwerpunkt ist also einerseits Mitte von HS und andererseits identisch mit dem Schwerpunkt von $M_aM_bM_c$. Projiziert man diesen auf die Parallele w_0 zu w durch H, dann ist die Projektion die Mitte zwischen H und dem Schwerpunkt V_0 der drei Punkte W_a, W_b, W_c, in denen w_0 die drei Umkreisspiegelbilder zum zweitenmal schneidet. V_0 liegt also auf der Normalen v_0 zu w_0 durch S.

Nun sind aber w_0, V_0, v_0 in bezug auf W homothetisch zu w, V, v im Verhältnis 2:1. Daher geht v durch V_1. Bezeichnet w^1 die zu w normale (konjugierte) Wallace-Gerade durch W^1, dann erkennt man, daß W^1, w^1 und V_1, v in bezug auf S symmetrisch sind. Damit ist der Beweis erbracht.

Neue Aufgaben

122. Man beweise, daß die Zahl $5^{2n+1}\, 2^{n+2} + 3^{n+2}\, 2^{2n+1}$ für $n \geqq 0$ stets durch 19 teilbar ist. I. BEREND[1]).

[1]) Diese Aufgabe stammt aus der sehr anregenden ungarischen Problemzeitschrift Közepiskolai Matematikai Lapok [II] *4* (Budapest 1950).

123. Im Innern eines Kreises ist ein fester Punkt P gegeben. Durch P sollen zwei aufeinander senkrecht stehende Sehnen so gelegt werden, daß die Summe ihrer Längen möglichst groß ist. P. TURÁN[1]).

124. Dem Einheitskreis ist ein reguläres n-Eck $P_1 P_2 \ldots P_n$ einbeschrieben. P sei ein Punkt der Kreisperipherie. Berechne

$$\overline{PP}_1^2 + \overline{PP}_2^2 + \cdots + \overline{PP}_n^2 .$$

J. MOLNÁR[1]).

125. If n is an integer greater than 1, the least prime factor of n is less than the least prime factor of $2^n - 1$. G. HIGMANN (Manchester).

126. Démontrer qu'il existe pour tout nombre naturel m un nombre naturel n, tel que les chiffres consécutifs du nombre m forment les chiffres initiaux du nombre 2^n (c'est-à-dire que $2^n = m \cdot 10^k + r$, où k et r, sont naturels et $r < 10^k$).
W. SIERPIŃSKI (Varsovie).

127. Von einem Dreieck ABC sei CA Durchmesser eines Kreises (A) und CB Durchmesser eines Kreises (B). Die beiden Kreise schneiden sich außer in C noch im Höhenfußpunkt C_2 auf AB. Ferner sei C Mittelpunkt einer symmetrischen Strahleninvolution, von der CA und CB ein Paar bilden. Ein beliebiges Paar dieser Involution schneide (A) außer in C in U und U' und (B) in V und V'. Man beweise:
1. UU' und VV' schneiden sich auf CC_2. 2. UV' und VU' schneiden sich auf AB. 3. Die Winkelhalbierenden von UU' und VV' wie auch die von UV' und VU' sind parallel zu den Doppelstrahlen der Involution. A. STOLL (Zürich).

128. Man konstruiere diejenigen Kreise, welche durch den Mittelpunkt einer gleichseitigen Hyperbel gehen und die Hyperbel doppelt berühren. H. BÖHEIM (Graz).

129. Als «Linse» bezeichnen wir ein Flächenstück, das aus zwei kongruenten, längs der Sehne zusammengefügten Kreissegmenten mit dem Zentriwinkel $\alpha < 180°$ besteht. Man beweise, daß man einem gleichseitigen Dreieck neben dem Inkreis ($\alpha = 180°$) noch genau zwei Linsen ($\alpha = 60°$ und $\alpha = 120°$) so einbeschreiben kann, daß sie sich im Dreieck frei drehen können und dabei ständig alle drei Seiten berühren. E. TROST (Zürich).

Berichte

Die Grazer Tagung für mathematischen Unterricht (Fortsetzung)

Vorschläge zur Förderung des geometrischen Unterrichts

Wie kann das Interesse des Schülers gefördert werden? Wie erreicht man, daß der Erwachsene in seiner Erinnerung an die Schule ein gutes Urteil über den geometrischen Unterricht bewahrt?

Im Realgymnasium, dem verbreitetsten österreichischen Schultypus, werden die Grundzüge des Grund- und Aufrißverfahrens und des Schrägrißverfahrens gelehrt. Der Schüler sollte aber auch andere gebräuchliche Verfahren kennenlernen, zum Beispiel die kotierte Projektion, die axonometrische Darstellung und die Perspektive. Und in der Stoffauswahl sollte noch mehr als bisher der Formenreichtum gezeigt werden, den Natur und Technik bieten. Denn der Schüler wird diesen Gegenstand im allgemeinen nicht um seiner selbst willen studieren, sondern sich oder dem Lehrer die Frage vorlegen, inwiefern ihm diese Kenntnisse nützen oder eine geistige Bereicherung bedeuten.

---

[1]) Diese Aufgabe stammt aus der sehr anregenden ungarischen Problemzeitschrift Közepiskolai Matematikai Lapok [II] *4* (Budapest 1950).