The envelope of the affine normal is the so-called affine evolute of $\mathfrak{H}$, and the point of contact C is the centre of the osculating conic at P (l. c., p. 28). Since C can be found by drawing a perpendicular from N to the line PO_1, the locus of C is a new hypocycloid where the diameter of the rolling circle is the segment NO_1.

The locus of the centres of the osculating conics for the hypocycloid $\mathfrak{H}$ is a new hypocycloid generated by a point of a circle with radius $a/2$ which is rolling inside the fixed circle with radius $3a$[1]).

This hypocycloid consists of 6 equal arcs. Every second cusp coincides with a cusp of $\mathfrak{H}$.

All the osculating conics will be *ellipses*, because the centre C lies on the same side of the tangent TP as the arc of $\mathfrak{H}$ which contains P. Of the ellipse that osculates $\mathfrak{H}$ at P we have found the centre C and a semi-diameter CP with the length $CP = 2\,a\sin^2(3\,\theta/2)$. Let Q be the extreme point of the conjugate semi-diameter CQ parallel to TP. At P the osculating ellipse has the same radius of curvature ϱ as $\mathfrak{H}$, and since the radius of curvature of the ellipse at P can be expressed by $CQ^2/CP \sin C$, where $\sphericalangle\, C = 3\,\theta/2$, we get

$$8\,a \sin\frac{3}{2}\,\theta = \frac{CQ^2}{2\,a\sin^2\frac{3}{2}\,\theta\,\sin\frac{3}{2}\,\theta}$$

or

$$CQ = 4\,a\sin^2\frac{3}{2}\,\theta = 2\,CP.$$

The length of the diameter parallel to the tangent TP is twice the diameter through P.

We thus have obtained the required construction of the osculating ellipse at the point P of $\mathfrak{H}$.

In a similar way we may obtain the osculating ellipses of a general hypo- or epicycloid. The construction, however, will not be as simple as here, because the first theorem mentioned above can not be extended to other cycloids.

At last we notice that the reciprocal curve of $\mathfrak{H}$ with respect to the circle with centre O and radius a is a *cubic* $\mathfrak{H}'$, which consists of three open convex arcs situated in angles of 60^0 and having the same vertices as $\mathfrak{H}$. By a dualistic transformation an osculating conic will be transformed into an osculating conic. The point O being outside all the osculating ellipses of $\mathfrak{H}$, it is obvious that each osculating conic of the cubic $\mathfrak{H}'$ will be a *hyperbola*. FR. FABRICIUS-BJERRE, Copenhagen.

La mode dans les mathématiques

La théorie élémentaire des séries insiste sur le rôle secondaire que jouent les premiers termes d'une série. Ce sont les termes de haut rang, leur allure, leur caractère, qui signifient tout.

Pourtant, la théorie des fonctions analytiques nous montre que ce point de vue, que nous inculquons à nos élèves de première année, peut induire en erreur. Le

---

1) J. LEMAIRE, *Hypocycloïdes et Epicycloïdes* (Paris 1929), p. 55.

théorème de LANDAU nous dit que toute série de puissances

$$a_0 + a_1 z + \cdots, \qquad (a_0,\, a_1 \text{ donnés})$$

— *n'importe quels coefficients suivent* — prendra à l'intérieur d'un cercle déterminé fixe

$$|z| \leqq R(a_0, a_1)$$

la valeur 0 ou 1 ou bien cessera de converger.

Ce paradoxe, qui a tant surpris LANDAU et ses contemporains, reste l'un des avertissements les plus sérieux vis-à-vis des jugements définitifs en mathématiques. Il peut aussi me servir de texte pour le propos plus général que j'ai en vue.

Chaque découverte nouvelle dans tel ou tel domaine des mathématiques apporte une correction aux connaissances déjà acquises; c'est un terme de plus à la série. L'intérêt suprême des *résultats* nouveaux, c'est la *tendance* qu'ils révèlent, c'est l'allure de la série dans ces régions avancées. Cependant, ces résultats ne sont toujours que de petites corrections. La grosse donnée, implicite à toute correction, c'est le premier terme, c'est la base, ce qu'il y a de commun à toutes les séries, à tous les domaines mathématiques. C'est le conditionnement du travail mathématique, sa matière première, ses instruments, ses entraves, et ses conventions plus ou moins consenties.

Une partie de ces données premières du travail mathématique fait l'objet de l'histoire, de la philosophie et de la psychologie des mathématiques. Reste une part bien plus terre à terre, plus *hier und jetzt*, c'est la mode du jour dans les mathématiques — qui doit bien exister, puisqu'on peut dire de tel sujet qu'il est démodé, de telle façon de s'exprimer qu'elle est surannée, de tel point de vue qu'il est moderne.

La mode, c'est le cadre offert à chaque époque à l'expression individuelle, une habitude collective qui règne et qui peut changer pour des raisons souvent imprévisibles.

Ce cadre peut avoir l'apparence d'une vérité éternelle ou d'une nécessité inéluctable, comme l'habitude de se vêtir. Un homme civilisé qui affirme qu'il est superflu de se vêtir n'est pas pris au sérieux. De même, un mathématicien qui nierait le besoin des définitions nettes serait pris pour un excentrique ou un mauvais mathématicien. C'est bien, si vous voulez, ce qu'était HEAVISIDE, dont on célébrait cette année le centenaire: pressé de définir sa dérivée d'ordre fractionnaire, il ne savait répondre autrement qu'en disant «la définition dépend de la fonction qu'on dérive!» Pourtant, n'a-t-il pas contribué au progrès des mathématiques pour une part que l'on tend même à exagérer de nos jours? Est-ce à cause de lui peut-être que le vague est même un peu à la mode aujourd'hui dans les sujets alliés au sien — la résolution des équations différentielles non-linéaires, la pratique des opérateurs en calcul numérique, la statistique? La vogue des propositions nébuleuses s'étend même à la théorie des nombres et aux fonctions de variables complexes. Cette idée de la rigueur mathématique, dont nous sommes si fiers, idée moderne sans doute, n'est donc peut-être qu'une mode un peu plus raisonnable qu'une autre, par conséquent ayant plus de chance de survivre à la réaction. Ce n'est pas une condition primordiale du travail mathématique utile, mais certes, nous aurons toujours peine à l'admettre. Encore faut-il être marxiste ou Anglo-Saxon pour ne pas préférer de beaucoup la mode des mathématiques rigoureuses. Je dis «ou Anglo-Saxon», car en Angleterre, il en est de la rigueur mathématique comme du système décimal: il peut bien être imposé par loi ou par nécessité dans certains domaines, on l'accepte, mais on ne l'aime guère. Déjà la controverse NEWTON–LEIBNIZ montre ce clivage, comme il apparaît de façon frappante dans les recherches récentes de J. E. HOFMANN.

Une mode d'un autre genre comporte le caractère d'une chose convenue une fois pour toutes, pour des raisons de commodité vite oubliées, mode qu'il ne vaut ensuite pas la peine de changer, comme celle du vêtement masculin. Les notations mathématiques sont de ce genre, une fois d'usage général, mais il faut dire qu'elles comportent encore une variété souvent plus voisine de la mode féminine – pittoresque sans doute, mais mal adaptée au travail sérieux et collectif. C'est pourquoi c'est aussi le côté le plus étudié de la mode dans les mathématiques, et celui qu'un effort collectif tel que celui des BOURBAKI pourrait effectivement stabiliser.

Finalement, la mode peut se présenter comme une affaire de goût, avec des causes complexes, économiques, psychologiques, nationales et de pur hasard. C'est bien là la mode au sens le plus strict. A cause des impondérables qui l'influencent, c'est aussi celle qui peut avoir l'effet le plus désastreux. Justement, le théorème de LANDAU va nous en fournir un exemple.

En 1879, PICARD découvrit son théorème sur les valeurs que prend une fonction analytique uniforme au voisinage d'un point singulier essentiel isolé. Ce théorème lui avait été fourni par la théorie de la fonction modulaire elliptique; les fonctions elliptiques étaient de mode; mais le nouveau résultat tombait en dehors du cadre – théorème sur les fonctions uniformes déduit de la théorie de fonctions multiformes. Ce désaccord déplaisait à PICARD, qui posa et même imposa à ses élèves le problème de la démonstration élémentaire de son théorème.

On cherchait cette démonstration élémentaire, on ne la trouvait pas. Le mystère grandissait autour de ce résultat d'un genre nouveau, on se mit à l'étudier sous tous les angles. Les recherches vont bien au delà du résultat initial, et de proche en proche s'en éloignent, mais il n'est pas permis d'ignorer le point de départ. A Paris, c'était de règle: on débutait toujours par les mots «Le célèbre théorème de M. PICARD». Le théorème de PICARD était à la mode. Cette mode domina à tel point les meilleurs talents mathématiques à Paris qu'ils ne purent trouver leur voie propre qu'après s'être détachés de Paris en prenant un poste en province. Quant au but premier proposé par PICARD, la démonstration élémentaire, une seule tentative réussit partiellement, et cela après un intervalle de dix-sept ans: c'est le «Petit théorème de PICARD», «Une fonction entière prend une infinité de fois toute valeur sauf deux tout au plus», que BOREL démontre par voie élémentaire, d'une façon indirecte, compliquée et purement formelle, en 1896. PICARD n'est pas satisfait (Comptes rendus). BOREL, du reste, non plus. Il n'a pas le courage de revoir sa démonstration, la publie telle quelle en appendice de son Cours. PICARD est d'avis que la méthode ne peut s'étendre au cas général. On s'en tient à son avis.

A l'étranger, entre temps, la mode parisienne, comme de juste, s'est répandue sans s'imposer d'une façon exclusive. On en trouve des variantes. A Berlin, par exemple, le théorème de PICARD est bien à la mode, mais on ne se fie pas si parfaitement à l'avis de PICARD. C'est à Berlin qu'on se mit sérieusement à reprendre la démonstration de BOREL; c'est encore, semble-t-il, un exercice dans la mode devenue classique, mais en réalité c'est le coup de grâce: à partir de 1904, ce ne sera plus le nom de PICARD qu'on réitèrera de part et d'autre, bien qu'on trouve encore quelques travaux à l'ancienne mode.

Une transition aussi brusque n'aurait pu avoir lieu si la mode de PICARD n'avait pas été artificiellement entretenue au delà de son terme approprié. On en était déjà à un plan bien plus avancé qu'en 1879 lors de la découverte de PICARD. Une foule de connaissances étaient pour ainsi dire retenues en laisse, attelées au théorème de PICARD, et il fallait qu'un jour leur élan fasse craquer les rênes. Ce jour arriva en 1904, et il se passa un phénomène bien curieux.

Imaginons-nous cet attelage dont je parlais, le lourd chariot de PICARD d'une part, de l'autre l'équipage impétueux. Les deux mathématiciens de Berlin qui se sont décidés de prendre part à la course s'installent, l'un dans le chariot, c'est SCHOTTKY, l'autre à cheval sur l'un des coursiers, c'est LANDAU. Ils ne se sont point entendus entre eux, c'est peut-être une coïncidence. Or, c'est LANDAU le premier qui fait partir l'équipage, avec un élan si brusque que les rênes cèdent et le chariot reste en arrière. LANDAU a découvert en effet ce fait inoui dont je vous ai parlé au début, et sous l'effet foudroyant de cette découverte, il s'échappe à toute volée et attire à lui tous les regards. Il ne s'occupe plus du théorème général de PICARD, qu'il n'a pas réussi à prouver. C'est SCHOTTKY, resté en arrière dans le chariot, qui y parvient, en corollaire d'un résultat encore plus extraordinaire que celui de LANDAU, et plus compréhensif! Malheureusement, on ne fait nullement attention à lui. LANDAU revient bien s'atteler au chariot tant perfectionné par SCHOTTKY; seulement, ce n'est plus le chariot de PICARD, c'est le chariot de LANDAU! C'est le théorème de LANDAU qu'on voit découler du beau résultat de SCHOTTKY.

La suite de cette histoire, pleine d'intérêt et d'actualité pour notre sujet, nous mènerait pourtant trop loin. Que cela suffise pour attirer l'attention sur une question qui n'a rien de frivole et qui demanderait d'être approfondie, afin de préserver la recherche mathématique, dans la mesure du possible, de l'effet aveugle de forces capricieuses et arbitraires. Cet effet, particulièrement notoire lorsqu'il s'agit du choix d'un sujet de recherche, s'exerce également sur le choix du style ou la disposition formelle d'un travail. Se dissocier là de l'habitude contemporaine la mieux apte à durer, c'est condamner son œuvre à l'oubli presque certain; et pourtant, l'habitude peut n'être pas très bonne. La mode du style est souvent forcée par des questions de typographie, celle de la forme (directe, indirecte, déductive, inductive, elliptique, complète, etc.) a ses raisons psychologiques et souvent personnelles qui bloquent momentanément des moyens de communication excellents en eux-mêmes. Sans cela, le désaccord dont j'ai fait mention déjà entre ces deux grandes intelligences NEWTON et LEIBNIZ n'aurait peut-être jamais eu lieu, et toute la Science y aurait gagné.

R. C. YOUNG, Londres.

Die graphische Lösung des Doppelsternproblems

Doppelsterne sind die zahlreichen Sternsysteme, in denen zwei Sonnen sich in Keplerschen Ellipsen um den Schwerpunkt des Systems bewegen, während der Schwerpunkt selbst eine gleichförmige, geradlinige Bewegung ausführt. Bei den von