Literaturüberschau

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **5 (1950)**

Heft 6

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Neue Aufgaben

106. Gegeben sind ein Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkt M und ein von M verschiedener Punkt A in der Ebene des Strahlenbüschels. Man durchlaufe von A aus eine völlig stetige, in A endende Kurve, die mit jedem Strahl des Büschels genau einen Punkt gemeinsam hat. Wenn die Kurve keine Gerade ist, besitzt sie entweder mindestens drei Wendepunkte oder mindestens einen Wendepunkt und mindestens eine Spitze. (Eine Kurve heißt «völlig stetig», wenn sie sowohl bezüglich ihrer Punkte als auch ihrer als existierend vorausgesetzten Tangenten stetig ist. Sie braucht hingegen nicht algebraisch, auch nicht einmal analytisch zu sein.)
L. Locher-Ernst (Winterthur).

107. Ein völlig stetiger Bogen (siehe Aufgabe 106) ohne Singularitäten (Wendepunkte, Spitzen, Doppelpunkte, Doppeltangenten, Ecken, Strecken) werde unter Vermeidung jeder Singularität über seine beiden Enden hinaus unbegrenzt fortgesetzt; dann existieren eine konvexe Hülle und ein konvexer Kern, denen sich der Bogen anschmiegt. Hierbei kann der Kern wie auch die Hülle ein konvexes Vieleck sein; ersterer kann insbesondere in einen Punkt, letztere in eine Gerade ausarten.
L. Locher-Ernst (Winterthur).

108. Wie Aufgabe 106, mit dem Unterschied, daß mehrfache Punkte, aber keine anderen Singularitäten, zugelassen werden. Der unbegrenzt fortzusetzende Bogen besitzt dann nur Doppelpunkte und notwendig zwei konvexe Hüllen, die keine gemeinsame Tangente und höchstens vier gemeinsame Punkte besitzen.
L. Locher-Ernst (Winterthur).

109. Es sei C ein Kreis auf der Kugel K. Man bestimme den geometrischen Ort der Spitzen derjenigen Kegel mit der Leitlinie C, deren zweite Schnittkurven mit K Kreise mit festem Radius sind. Vicente Inglada (Madrid).

110. Es sei C eine gegebene Kurve außerhalb einer Ellipse E. Von den Punkten P von C werden die Tangenten an E gezogen. Für welche Punkte P hat das von der Berührungssehne abgeschnittene Ellipsensegment maximale oder minimale Fläche?
Vicente Inglada (Madrid).

111. Bei einem Dreieck mit den Seiten a, b, c ist die Potenz des Schwerpunktes in bezug auf den Umkreis gegeben durch $-(a^2+b^2+c^2)/9$. Man formuliere und beweise den entsprechenden Satz für n Punkte auf einer Kugelfläche beliebiger Dimensionszahl (in einem euklidischen Raum). A. Stoll (Zürich).

112. Ein Dreieck, bei dem der Abstand des Schwerpunktes vom Umkreismittelpunkt einem Drittel des Umkreisradius gleichkommt, ist rechtwinklig. Das Umgekehrte ist evident. A. Stoll (Zürich).

113. Kann die Summe der ersten n Kubikzahlen für $n > 1$ wieder eine Kubikzahl sein? (Vgl. Aufgabe 71.) E. Trost (Zürich).

Literaturüberschau

G. Ricci: *Figure, reticoli e computo di nodi*

Rendiconti del Seminario matematico e fisico di Milano *19*, 165–205 (1948)

Der aus einem Vortrag entstandene Aufsatz berichtet über die Entwicklung eines klassischen Problems aus der geometrischen Zahlentheorie. Es handelt sich um die Abschätzung der Anzahl $A(x)$ der Gitterpunkte eines quadratischen Gitters, die innerhalb oder auf dem Rand einer Kreisscheibe (vom Radius $\sqrt{x}$) oder eines allgemeineren, vom Parameter x abhängenden Eibereiches C_x von der Fläche $F(x)$ liegen. Die Aussagen sind von folgendem Typus: $A(x)=F(x)+O(x^\nu)$, wo $O(x^\nu)$ eine Funktion von der Größenordnung x^ν bedeutet, d.h. $\lim\limits_{x\to\infty} O(x^\nu)/x^\nu$ ist endlich.

Für den Kreis ist schon von Gauss $\nu = 1/2$ gefunden worden. Die Abschätzung wird um so besser, je kleiner ν gewählt werden kann. Unter gewissen Beschränkungen für die Krümmung von C_x gilt nach van der Corput $\nu = 1/3$. Besonderes Interesse besitzt folgende Frage: Wie groß ist die untere Grenze ϑ der ν für den Fall des Kreises? Die Jagd nach der «Weltkonstanten» ϑ wird mit schwerstem Geschütz geführt. 1923 fand VAN DER CORPUT das Ergebnis $\vartheta < 1/3$, was eine große Überraschung bedeutete, da man zumindest für den Kreis $\vartheta = 1/3$ erwartete. Dieser Wert der Weltkonstanten gilt hingegen für gewisse andere Kurven C_x, wie JARNIK 1926 zeigte. Das beste Resultat für den Kreis ist heute $\vartheta \leqq 13/40 = 0{,}325$ (L. HUA, 1942).

Parallel zu den Bereichen C_x werden die von einer gleichseitigen Hyperbel begrenzten Bereiche $u \geqq 1$, $v \geqq 1$, $u\,v \leqq x$ ($x \geqq 1$) betrachtet (Teilerproblem). Auch Verallgemeinerungen auf höhere Dimensionen sind berücksichtigt.

Dieser in brillanter Sprache verfaßte Aufsatz gibt uns einen seltenen Einblick in ein sonst wenig zugängliches Gebiet. *E. Trost.*

VICENTE INGLADA: *Métodos para la resolución de los problemas geométricos*

476 Seiten, Editorial Dossat S.A., Madrid 1948

Die fruchtbarsten Methoden zur Lösung geometrischer Probleme findet man in der Lehre der geometrischen Transformationen, die zugleich die Möglichkeit liefert, eine gewisse Ordnung in die unendliche Mannigfaltigkeit der Probleme zu bringen. Diesen Gesichtspunkt stellt der Verfasser des vorliegenden Werkes, ein jenseits der Pyrenäen durch verschiedene mathematische Werke bekannter Bauingenieur, in überzeugender Weise dar. Der erste Teil des Werkes enthält eine systematische Theorie der Transformationen, ihrer Gruppen und Invarianten, in analytischer Darstellung. Die zahlreichen Beispiele sind sehr geschickt ausgewählt. Wir erwähnen nur einen gruppentheoretischen Beweis des Satzes, daß sich vier beliebige über den Seiten eines Sehnenvierecks nach außen gezeichnete Faßkreise in den Ecken eines neuen Sehnenvierecks schneiden, sowie einen analytischen Beweis des Satzes von SALMON, wonach das Doppelverhältnis der von einem beliebigen Punkte einer ebenen Kubik an diese gehenden Tangenten für die ganze Kurve konstant ist.

Im zweiten Teil kommen auch rein geometrische Methoden zu ihrem Recht. Man findet hier eine Fülle schöner Aufgaben über geometrische Orte in Ebene und Raum sowie über Hüllkurven. Mit infinitesimalgeometrischen Betrachtungen werden Extremalaufgaben sowie Tangenten-, Krümmungs- und kinematische Probleme behandelt. Einen großen Raum nehmen die Anwendungen der komplexen Zahlen ein, die hier u.a. zur Behandlung der Kegelschnitte dienen. Den Schluß bildet ein Abriß der Differentialgeometrie der Kurven und Flächen auf vektorieller Grundlage.

Das Buch ist sehr klar geschrieben und schön ausgestattet. Nur wird der Leser neben einigen Inkorrektheiten das fast vollständige Fehlen von Literaturhinweisen bedauern. Das Erscheinen dieses schönen Werkes ist ein Zeugnis für das lebendige Interesse an der Mathematik in Spanien und dürfte der Geometrie in diesem Lande und im ganzen spanischen Sprachgebiet viele neue Freunde zuführen. *E. Trost.*

E. LINDELÖF und E. ULLRICH: *Einführung in die höhere Analysis*

2. Auflage, 526 Seiten, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1950

LINDELÖFS Einführung in die Infinitesimalrechnung hat sich dank der vortrefflichen Übersetzung ULLRICHS auch im deutschen Sprachgebiet einen so guten Namen erworben, daß man die zweite Auflage nur aufs wärmste begrüßen kann. Die Brücke von Mittelschule zu Hochschule wird hier breit und tragfähig gebaut, so daß besonders der Lehrer eine Fülle von Anregungen für den Unterricht findet. Viele Dinge, wie den Abschnitt über das Rechnen mit Näherungswerten bzw. Kettenbrüchen, wird man in ähnlichen Werken vergeblich suchen, obwohl diese sehr geeignet sind, den Begriff des Grenzwertes vorzubereiten. Die zur strengen Begründung der höheren Analysis notwendige Theorie der Irrationalzahlen wird erst am Schluß entwickelt, um die «anschauliche» Erfassung der Grundgedanken nicht zu stören. Eine Einführung in die Determinanten und ein Abriß der Theorie der komplexen Zahlen beschließen den inhaltsreichen Band. *E. Trost.*

Centre belge de Recherches mathématiques
Colloque de Géométrie algébrique, tenu à Liège les 19, 20 et 21 décembre 1949
Verlag Georges Thone, Liège; Masson & Cie., Paris

Auf den Klassikern der Geometrie, wie PONCELET, DE JONQUIÈRES, CHASLES, STEINER, GRASSMANN, CAYLEY, SALMON, HALPHEN, BRILL, NOETHER, ZEUTHEN und KLEIN, aufbauend, entwickelte seit dem Beginn des Jahrhunderts die italienische Geometerschule mit CREMONA, VERONESE, BERTINI, SEGRE, CASTELNUOVO, ENRIQUES und SEVERI die moderne algebraische Geometrie, die ihre gewaltige Fruchtbarkeit durch ihre intensive Einwirkung auf die zentralsten Gebiete der Mathematik, wie Zahlentheorie, Algebra, Gruppentheorie, Funktionentheorie, Differentialgleichungen, Topologie, zeigte.

An einführenden Werken in diese Gebiete nennen wir B. L. VAN DER WAERDEN, *Einführung in die algebraische Geometrie*; B. SEGRE, *Lezioni di geometria moderna* (siehe die Besprechung in dieser Zeitschrift, Bd. IV, S. 94–96); F. SEVERI, *Grundlagen der abzählenden Geometrie* und *Introduzione alla geometria algebrica*; W. GRÖBNER, *Moderne algebraische Geometrie* (die idealtheoretischen Grundlagen).

L. GODEAUX, der zu den führenden Geometern zählt, hat als Präsident des belgischen mathematischen Forschungsinstituts die Mathematiker zu einem Austausch ihrer Ergebnisse eingeladen. Im Rahmen dieser Besprechung ist es nicht möglich, auf Einzelheiten dieser Vorträge, die sehr spezielle Fragen behandeln, einzugehen.

Den ersten Vortrag hielt der Altmeister der algebraischen Geometrie F. SEVERI über *La géométrie algébrique italienne; sa rigueur, ses méthodes, ses problèmes*. In recht temperamentvoller Weise wendet er sich gegen die Legende von der mangelnden Strenge der italienischen Schule. Der Vortrag gibt zugleich eine sehr lesenswerte Geschichte der Entwicklung der algebraischen Geometrie.

L. DUBREIL-JACOTIN (Poitiers) und P. DUBREIL (Paris) berichteten über die verschiedenen Ringtypen (Integritätsbereiche), die in der algebraischen Geometrie eine Rolle spielen und diese mit der Zahlentheorie verbinden.

B. L. VAN DER WAERDEN sprach über *Les variétés de chaînes sur une variété abstraite*. Der Vortragende setzt sich mit den Begriffsbildungen auseinander, die von A. WEIL vorgeschlagen wurden.

P. SAMUEL (Clermont-Ferrand) verwendet in seiner Arbeit *Multiplicités des composantes singulières d'intersection* die Methode von ZARISKI.

F. CHÂTELET (Besançon) sucht in *Application des idées de Galois à la géométrie algébrique* die Begriffsbildung der Galoisschen Theorie für die Geometrie fruchtbar zu machen.

Intégration uniforme de certaines systèmes du quatrième ordre, à deux variables indépendants, attachés à une surface algébrique heißt der Beitrag von R. GARNIER (Paris).

Der zweite große italienische Meister, B. SEGRE, stellt in *Problèmes arithmétiques en géométrie algébrique* wunderschöne Beispiele zusammen.

P. LIBOIS (Bruxelles) trägt in *La synthèse de la géométrie et de l'algèbre* wesentlich zur Klärung des Begriffes «algebraische Mannigfaltigkeit» bei.

Den Band beschließen die beiden Arbeiten:

F. BUREAU (Liège), *Quelques questions de géométrie suggérées par la théorie des équations aux dérivées partielles totalement hyperboliques* und

L. GODEAUX (Liège), *Applications de la théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique.* *P. Buchner.*

LOUIS DE BROGLIE:

La Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules
2. Aufl., Gauthier-Villars, Paris 1950

Das Buch behandelt die Methoden und Probleme, welche beim Anwenden der allgemeinen quantentheoretischen Prinzipien auf das Zusammenwirken mehrerer Teilchen vorliegen. Als solches ist es nicht eine Einführung in die Quantentheorie, sondern setzt eine Vertrautheit mit deren Grundlagen und Eigentümlichkeiten voraus, insofern diese schon am Verhalten eines einzelnen materiellen Teilchens in einem «äußeren» Kraftfeld sich herausstellen. Vorgängig einer Behandlung der vielgestaltigen und neuartigen Besonderheiten, welche bei der Wechselwirkung von Teilchen im quantentheoretischen Formalismus sich ergeben, werden in den drei ersten Kapiteln die Grundlagen der Theorie in sehr allgemeiner Form bereitgestellt. Das erste Kapitel gibt inhaltlich ein Résumé der klassischen Mechanik, aber in einer Gestalt, die ihren Blickpunkt schon an der Wellenmechanik gewonnen hat. Die Analogie zwischen der Bewegung eines mechanischen Systems und der Ausbreitung von Strahlungsfeldern wird eingehender verfolgt, als dies üblicherweise der Fall ist. Man ist, wenn man diese Darstellung vor sich hat, überrascht, zu sehen, wie nahe diese beiden Seinsgebiete schon in der klassischen Form aneinander herangerückt werden können, aber ermißt zugleich, welchen Schritt in der Geistesgeschichte es bedeutete, die formal sich andeutende Analogie auch ernst zu nehmen und zu einer Wellenmechanik aufzusteigen. Diesen Aufstieg, zu dem der Anfang von DE BROGLIE selbst gemacht wurde, bringt das zweite Kapitel, allerdings nicht in genetischer Entwicklung, sondern vorwiegend in deduktiver Form, indem die Wellengleichung (Schrödinger-Gleichung) hingesetzt wird und dann einerseits die Beziehung zur klassischen Mechanik nachgewiesen, anderseits das Neuartige, welches mit der Wellenfunktion in der Mechanik Eingang findet, herausgearbeitet wird. Mit besonderem Nachdruck ist die Verwendung generalisierter (krummliniger) Koordinaten klargestellt. Im dritten Kapitel ist das Kernstück der Quantentheorie in zwei allgemeinen Prinzipien formuliert, welche den Entwicklungssatz und die Beziehung zwischen möglichen Meßwerten und Eigenwerten von Operatoren aussprechen. Eingehend werden die sogenannten Konstanten der Bewegung untersucht. Besonders schön ist der Hinweis auf ihren Zusammenhang mit der Transformationsgruppe des mechanischen Problems. Ein eigenes Kapitel ist der Bedeutung des Schwerpunkts in der Wellenmechanik eingeräumt, nachdem schon im ersten Kapitel die Schwerpunktssätze der klassischen Mechanik (von KOENIG) dargestellt wurden. Im Hinblick darauf, daß die Transformation auf Schwerpunktskoordinaten bei den Anwendungen häufig auftritt, wird man eine ausführlichere Auseinandersetzung dieser Dinge vielerorts zu schätzen wissen. Der Anwendung und Klärung der allgemeinen quantentheoretischen Prinzipien sind drei Beispiele gewidmet, die der Literatur entstammen und in denen hervorragende Forscher (FERMI, DARWIN, HEISENBERG) in den Jahren der Entdeckung und stürmischen Entwicklung der Theorie sich selber mit dieser auseinandersetzten. Es sind dies Meilensteine, nun nicht eines «Königsweges», aber eines Weges von «Königen». Ihre Wahl charakterisiert das Niveau, auf welches der Autor seinen Leser führt. Die weiteren Kapitel behandeln die typisch quantentheoretischen Besonderheiten der Wechselwirkung von Teilchen: zunächst die beiden Formen der Störungstheorie, dann die Austauschphänomene ohne und mit Spin. Ein abschließendes Kapitel bringt die Anwendung auf die Theorie der chemischen Bindung und leitet zuletzt zu den aktuellen Fragen des Aufbaus der Kerne über.

Der Name des Autors läßt von vorneherein erwarten, daß das Buch immer wiederum Wege und Gedanken verfolgt, die über dasjenige hinausgehen, wodurch man landläufigerweise den Sinn der Quantentheorie sich vergegenwärtigt. Wir heben nur zwei Dinge heraus: eine eindringliche Bemerkung über das Auftreten gemischter Zustände nach erfolgter Wechselwirkung zweier Teilchen, welche überdies durch das Beispiel von FERMI ausgezeichnet konkretisiert ist, dann die Auseinandersetzungen über die Verwendung von Wellenfunktionen von symmetrischer oder antisymmetrischer Form. Erstere Bemerkung ist unseres Erachtens schwer an naturphilosophischem Gehalt. Für derartige Fragen ist außerdem an vielen Stellen des Buches Anregung und Klärung zu finden, und sein Stil kommt einem solchen Bedürfnis dadurch entgegen, daß er den Inhalt der Theorie auch ausführlich in der Sprache des unmittelbaren Denkens auseinandersetzt und sich nicht mit der bloßen Formulierung im Kalkül zufrieden gibt. Dadurch erhält der Leser auch starke Hilfen, um über schwierigere Dinge hinwegzukommen.

G. Balaster.