Résolution des équations algébriques par la règle à calcul

Autor(en): **Besson, M. / Brasey, Edm.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **5 (1950)**

Heft 6

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-14914

aufsetzen. So erhalten wir eine von Kreisbogen begrenzte Figur, die genau den gleichen Umfang hat wie der Kreis der ersten Figur. Also muß ihr Flächeninhalt kleiner oder gleich dem des Kreises sein, wegen der isoperimetrischen Eigenschaft des Kreises. Das Gleichheitszeichen kann nur dann gelten, wenn die zweite Figur auch ein Kreis, kongruent dem ersten Kreis ist; dann aber sind auch die Polygone kongruent. In allen anderen Fällen ist die zweite Figur kleiner als die erste.

Zieht man nun beiderseits die kongruenten Kreissegmente wieder ab, so folgt, daß auch das zweite Polygon einen kleineren Flächeninhalt hat als das erste, außer in dem einen Fall, wo die beiden kongruent sind. Damit ist die Maximaleigenschaft des Sehnenpolygons erneut bewiesen.

Wäre das zweite Polygon auch ein Kreissehnenpolygon, aber nicht kongruent dem ersten, so hätte einerseits das zweite Polygon einen kleineren Flächeninhalt als das erste, andererseits aber, da man im Beweis die Rollen der beiden Kreissehnenpolygone vertauschen kann, das erste einen kleineren Flächeninhalt als das zweite. Das widerspricht sich. Also kann es nur ein Kreissehnenpolygon mit gegebenen Seiten a, b, ... geben.

B. L. VAN DER WAERDEN.

Résolution des équations algébriques par la règle à calcul

Quand on opère avec une règle à calcul, on gagne en rapidité et, souvent, en exactitude à résoudre les équations algébriques par approximations successives. Dans le cadre restreint de cet article, nous nous limiterons au 2e et au 3e degré. Nous devrons quelque peu sacrifier les considérations théoriques à l'exposé des résultats pratiques.

Équation du deuxième degré

Soit l'équation

$$x^2 + px + q = 0.$$

On l'écrit sous la forme

$$x = \frac{-q}{p + x}. \tag{1}$$

On donne à x dans le deuxième membre une valeur quelconque x_0 (de préférence $x_0 = 0$) et on tire

$$x_1 = \frac{-q}{p + x_0}.$$

On substitue ensuite dans le deuxième membre de l'équation (1) cette valeur x_1 qu'on vient de calculer; on en tire

$$x_2 = \frac{-q}{p + x_1}, \quad \text{etc.}$$

On peut démontrer que la suite $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ est convergente. Elle converge vers la plus petite, en valeur absolue, des racines de l'équation, par valeurs constamment supérieures ou constamment inférieures si $q > 0$, et par oscillations si $q < 0$.

Exemple Ier. $x^2 - 5x + 3 = 0$. On part de

$$x = \frac{-3}{x-5} = \frac{3}{5-x}.$$

On place l'index de la réglette en face du nombre 3 de l'échelle des nombres de la règle, on amène le trait du curseur sur 5 de l'échelle des inverses de la réglette; il recouvre alors sur la règle le quotient $x_1 = 0{,}6$. On déplace le curseur de 0,6 divisions *vers la droite* à partir du 5 de l'échelle des inverses et on lit sur la règle (sous le trait du curseur)

$$x_2 = \frac{3}{5-0{,}6} = \frac{3}{4{,}4} = 0{,}68.$$

A partir de cette position, on déplace le curseur de 0,08 divisions de l'échelle des inverses (toujours vers la droite), et on lit sur la règle

$$x_3 = \frac{3}{5-0{,}6-0{,}08} = \frac{3}{5-0{,}68} = 0{,}694$$

et ainsi de suite. On obtient la suite convergente

$$x_1 = 0{,}6, \quad x_2 = 0{,}68, \quad x_3 = 0{,}694, \quad x_4 = 0{,}696, \quad x_5 = 0{,}697.$$

On s'arrête, lorsque 2 valeurs successives, x_n et x_{n+1}, ne présentent plus de différence appréciable au degré d'approximation de la règle.

Lorsqu'on a trouvé sur la règle la première racine (ici 0,697), on peut lire la seconde en face, sur la réglette, puisque, dans la position occupée par la réglette, tous les nombres en regard forment un produit égal au produit des racines (ici 3). Mais l'approximation sera meilleure si l'on déduit la deuxième racine x'' de la première x' à l'aide de la somme $x' + x'' = 5$.

Remarques: I. – Avec une règle de 50 cm, on est certain que

$$0{,}697 < x' < 0{,}698$$

et, par suite,

$$4{,}303 > x'' > 4{,}302$$

puisque $x' + x'' = 5$.

II. — On s'arrangera pour que la racine calculée par la règle soit positive, ce qui est toujours facile. Si par exemple on avait l'équation $x^2 - 5x - 3 = 0$ d'où

$$x = \frac{3}{x-5}$$

on poserait $z = -x$ d'où

$$z = \frac{3}{z+5}$$

et on obtiendrait la suite oscillante:

$$z_1 = 0{,}6, \quad z_2 = 0{,}536, \quad z_3 = 0{,}542, \quad z_4 = 0{,}5415 \cong z'.$$

On en déduirait, pour la somme des racines, $z'' = -5{,}5415$, d'où $x' = -0{,}5415$, $x'' = 5{,}5415$.

III. — Nous avons choisi comme premier exemple des coefficients simples pour faciliter les explications. On peut aisément se rendre compte que des coefficients plus compliqués ne rendent les opérations ni plus longues, ni plus difficiles, ni moins exactes. Ainsi l'équation $x^2 - 95{,}8\,x + 15{,}2 = 0$, dont la solution est donnée par une suite plus rapidement convergente, sera résolue plus rapidement que les précédentes, et ses racines $x' = 0{,}1590$, $x'' = 95{,}641$ sont déterminées avec autant d'exactitude. Si l'on avait, avec la même règle, résolu cette dernière équation par la formule classique, on aurait obtenu, en un temps plus long, les résultats beaucoup moins précis $x' = 0{,}2$, $x'' = 95{,}6$.

IV. — Quand la suite des valeurs $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ est faiblement convergente, la méthode des approximations successives appliquée rigoureusement pourrait devenir plus longue que la méthode classique. Soit par exemple l'équation $x^2 + 2{,}3\,x - 1{,}7 = 0$ d'où

$$x = \frac{1{,}7}{2{,}3 + x}.$$

On obtiendrait la suite oscillante

$$x_1 = 0{,}74, \quad x_2 = 0{,}55, \quad x_3 = 0{,}597, \quad x_4 = 0{,}587, \quad x_5 = 0{,}589, \quad x_6 = 0{,}5885.$$

Mais il est facile de modifier la méthode de façon à lui conserver ses avantages de rapidité. Au lieu d'ajouter d'emblée au terme 2,3 du dénominateur de l'expression $x = 1{,}7/(2{,}3 + x)$ la valeur $x_1 = 0{,}74$, on l'ajoutera par tranches de 0,1 (comptées à partir de 2,3 de l'échelle des inverses de la réglette) en déplaçant lentement le curseur et en suivant la diminution du nombre qu'il recouvre sur la règle. On voit ainsi qu'il faut s'arrêter à 0,5. On a alors

$$x_2 = \frac{1{,}7}{2{,}3 + 0{,}5} \cong 0{,}6.$$

Il reste maintenant *moins* de 0,1 à ajouter. On fait cette addition par tranches de 0,01 en prenant les mêmes précautions que plus haut (on peut ajouter à peine 9 tranches) ce qui conduit à

$$x_3 = \frac{1{,}7}{2{,}3 + 0{,}5 + 0{,}09} = 0{,}5885 \cong x', \quad \text{d'où} \quad x'' = -2{,}8885.$$

Ce procédé, indépendamment de sa plus grande rapidité, présente l'avantage capital de pouvoir être utilisé dans des cas où la méthode rigoureuse des approximations successives cesse d'être applicable — ce qui se produira dans l'équation du 3e degré. C'est pourquoi nous attirons dès maintenant l'attention sur lui. Nous le désignerons par l'abréviation: A. S. M. (méthode des approximations successives modifiée) et nous réserverons l'abréviation A. S. à la méthode rigoureuse d'approximations successives. Nous laissons au lecteur le soin d'adapter le procédé A. S. M. au cas d'une suite convergeant vers la racine par valeurs constamment supérieures ou constamment inférieures à celle-ci.

V. — Que l'on procède par A. S. ou par A. S. M., il est parfaitement inutile de lire exactement les valeurs intermédiaires $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Seule la dernière doit être lue aussi exactement que possible. On lira les autres avec une exactitude progressive. Ainsi dans l'équation $x^2 + 11\,x - 5 = 0$ (index de la réglette en face de 5, curseur sur

11 de l'échelle des inverses), on lira, non pas $x_1 = 0{,}455$, mais simplement $x_1 = 0{,}4$ avec une décimale; on déplacera le curseur de 0,4 à partir de 11, donc jusqu'en 11,4 de l'échelle des inverses. On lira alors sur la règle $x_2 = 0{,}44$ avec deux décimales. On poussera ensuite le curseur de 0,04, soit en 11,44 de l'échelle des inverses, et on lira sur l'échelle des nombres de la règle $x_3 = 0{,}437 \cong x'$. L'ensemble des manœuvres se réduit, après placement de l'index de la réglette en face de 5 de l'échelle des nombres de la règle, à déplacer le curseur successivement sur 11, puis 11,4, puis 11,44 de l'échelle des inverses, ce qui, en raison de la faible exactitude exigée des lectures, se fait dans le temps nécessaire pour prononcer lentement 11; 11,4; 11,44 avec une pause de moins d'une seconde entre chaque nombre.

Résolution de l'équation du 3ᵉ degré sous la forme $x^3 + p\,x + q = 0$

On sait que cette équation a 1 ou 3 racines suivant que $4\,p^3 + 27\,q^2$ est positif ou négatif.

I. — *Cas de trois racines* $4\,p^3 + 27\,q^2 < 0$, *donc* $p < 0$

Les racines extrêmes x' et x''' sont de signe contraire, $x'\,x''' < 0$; la racine intermédiaire x'' est du signe de q, donc $q\,x'' > 0$.

A. — Calcul de la racine intermédiaire x''

On la calcule à partir de l'expression

$$x = \frac{-q}{p + x^2} \tag{2}$$

par A. S., ce qui est toujours possible. On peut, en effet, démontrer que la dérivée par rapport à x de la fonction $y = -\,q/(p + x^2)$ est inférieure à 1 au voisinage de x''.

On traite l'expression (2) comme on a traité l'expression (1) (voir page 125) dans la résolution de l'équation du 2ᵉ degré en faisant jouer à x^2 du 2ᵉ membre le rôle que jouait x. Il est indispensable que la règle soit pourvue d'une échelle des carrés.

B. — Calcul des deux racines extrêmes x' et x'''

Ces deux racines ne sont pas calculables directement par A. S., mais elles le sont indirectement, par l'intermédiaire de leurs carrés. Nous désignerons ce procédé par l'abréviation A. S. (x^2).

On écrit
$$x^2 = |p| \pm \frac{|q|}{|x|}\,. \tag{3}$$

La racine intermédiaire ayant été précédemment calculée, la réglette se trouve déjà placée dans la position voulue (index en regard de $|q|$), et le calcul des deux racines se fera uniquement par des déplacements du curseur. On place celui-ci sur $|p|$ de l'échelle des carrés, ce qui revient à faire $q/x = 0$ (ce qui revient, autrement dit, à partir de la valeur initiale $x_0 = \infty$ dans le 2ᵉ membre de l'expression ci-dessus). On a ainsi $x_1^2 = -\,p$. C'est la première valeur approchée de x'^2 ou de x'''^2; c'est le point de départ commun à la recherche de ces deux racines. Dans cette position, le trait du curseur recouvre sur l'échelle des nombres de la règle le nombre $x_1 = \sqrt{-p}$ et sur l'échelle des inverses de la réglette le nombre $|q|/|x_1|$. En effet, l'index de la réglette étant en face de $|q|$, les nombres en regard sur l'échelle des inverses de la réglette et sur l'échelle des nombres de la règle ont pour produit $|q|$.

Pour calculer la plus grande des racines en valeur absolue, on déplace le curseur vers la droite à partir de $|p|$ de l'échelle des carrés d'une longueur égale à la valeur $|q|/|x_1|$ qu'on vient de lire sur l'échelle des inverses. Le trait du curseur recouvre par suite $x_2^2 = |p| \pm (|q|/|x_1|)$ sur l'échelle des carrés et $|q|/|x_2|$ sur l'échelle des inverses. On pousse le curseur sur $|p| + (|q|/|x_2|) = x_3^2$ de l'échelle des carrés, etc. On obtient ainsi une suite de valeurs x_2^2, x_3^2, $x_4^2, \ldots$ qui converge par oscillations vers la racine cherchée.

Pour calculer la plus petite des racines en valeur absolue, on repart de $|p|$ sur l'échelle des carrés, on déplace le curseur *vers la gauche* de $|q|/|x_1|$. On obtient $x_2^2 = |p| - (|q|/|x_1|)$, etc.

On calcule ainsi une suite de valeurs x_2^2, x_3^2, x_4^2, ... qui converge par valeurs décroissantes vers la solution.

Exemple: $x^3 - 5\,x + 3 = 0$ (3 racines).

a) Calcul de la racine intermédiaire

$$x = \frac{3}{5 - x^2}\,.$$

Index de la réglette en face de 3. On lit directement *sur l'échelle des carrés* en face de 5 de l'échelle des inverses $x_1^2 = 0{,}36$, qu'on peut arrondir à 0,4. On déplace le curseur vers la droite de 0,4 divisions comptées à partir de 5 sur l'échelle des inverses. Il recouvre alors sur l'échelle des carrés le nombre $x_2^2 = 0{,}427$ qu'on arrondit à 0,43. On pousse encore le curseur de 0,03 sur l'échelle des inverses, et on lit sur l'échelle des carrés $x_3^2 = 0{,}431$ et sur l'échelle ses nombres $x_3 = 0{,}656 \cong x''$. L'opération est aussi simple que pour le 2e degré.

b) Calcul des racines extrêmes

$$x^2 = 5 \pm \frac{3}{|x|}\,.$$

On laisse la réglette dans la position qu'elle occupe à la suite du calcul précédent. On place le curseur sur 5 de l'échelle des carrés; c'est la première valeur approchée x_1^2, point de départ commun au calcul des deux racines.

1° – Calcul de x'. Le curseur étant sur $x_1^2 = 5$ de l'échelle des carrés, il recouvre sur l'échelle des inverses la valeur $3/|x_1| = 1{,}3$. On *ajoute* cette valeur à 5 sur l'échelle des carrés en déplaçant le curseur de 1,3 divisions vers la droite, ce qui l'amène sur 6,34 de l'échelle des carrés. C'est la deuxième valeur approchée $x_2^2 = 6{,}3$. On lit sur l'échelle des inverses $3/|x_2| = 1{,}2$. On place le curseur sur $5 + 1{,}2 = 6{,}2$ de l'échelle des carrés, etc. On obtient ainsi pour x^2 la suite – oscillante comme prévu – 5; 6,3; 6,2; $6{,}205 \cong x'^2$, et on lit sur l'échelle des nombres

$$x' = \sqrt{6{,}205} = 2{,}491\,.$$

2° – Calcul de x'''. On opère de la même façon sauf qu'on *retranche* les valeurs

$$\frac{3}{|x|}\,, \qquad \text{d'où} \qquad x''' = 1{,}834\,.$$

Les trois racines de cette équation sont donc:

$$x' = -2{,}491, \quad x'' = 0{,}656, \quad x''' = 1{,}834.$$

Il ne peut y avoir aucune hésitation sur les signes. On sait en effet que x'', la racine intermédiaire, est positive puisque $q = 3$ est positif. Quant aux racines extrêmes dont l'une est positive et l'autre négative, il est clair que la plus grande en valeur absolue est ici négative, puisque, dans l'équation réduite $x^3 + p\,x + q = 0$, on a $x' + x'' + x''' = 0$. Cette particularité nous permet en outre un contrôle aisé et rapide de l'approximation des calculs. Si, dans le cas présent, nous effectuons cette somme, nous obtenons

$$x' + x'' + x''' = -2{,}491 + 0{,}656 + 1{,}834 = -0{,}001,$$

ce qui permet *pratiquement* de conclure que les trois racines sont bien calculées à moins de 0,001 près.

Voici quelques équations calculées par A. S. et A. S. M. avec une règle de 50 cm.

	x'	x''	x'''	$x' + x'' + x'''$
$x^3 - 5{,}55\,x + 2{,}8 = 0$	2,045	0,5316	$-$ 2,576	+0,001
$x^3 - 129\,x - 27 = 0$	$-$11,25	$-$0,2093	11,46	+0,001
$x^3 - 129\,x - 270 = 0$	$-$10,12	$-$2,172	12,29	$-$0,002
$x^3 - 3\,x + 1 = 0$	1,532	0,347	$-$ 1,879	+0,000
$x^3 - 19{,}45\,x - 14{,}25 = 0$	$-$ 3,982	$-$0,7542	4,738	$-$0,002

On voit que l'approximation est très satisfaisante. Quant au temps employé, il représente en moyenne le dixième de ce que demande la méthode classique.

II. – *Cas d'une racine* $4\,p^3 + 27\,q^2 > 0$

p peut être alors positif ou négatif. Si $p < 0$, la racine unique peut toujours être calculée par A. S. (x^2) comme la plus grande en valeur absolue des racines extrêmes de l'équation a 3 racines.

Si $p > 0$, la méthode des A. S. peut être en défaut, mais la méthode des A. S. M. reste toujours applicable. On part de $x = -\,q/(p + x^2)$.

Exemple: Soit l'équation $x^3 + 175\,x - 9375 = 0$ qui ne peut être résolue que par A. S. M. On part de $x = 9375/(175 + x^2)$. L'index de la réglette étant placé en face de 9375 de l'échelle des nombres et le curseur amené sur 175 de l'échelle des inverses, il recouvre sur l'échelle des carrés le nombre $x_1^2 = 2870$. Nous l'ajoutons à 175 *par tranches de 100* en surveillant à chaque étape le nombre recouvert par le curseur sur l'échelle des carrés. Quand nous avons ajouté 300, le curseur recouvre sur l'échelle des inverses le nombre $175 + 300 = 475$ et sur l'échelle des carrés le nombre 390. Il reste donc *moins de 90* à ajouter. On continue par tranches de 10. On aboutit à la solution $x = 18{,}33$.

Nous donnons ci-dessous un résumé des résultats d'ensemble:

$$4\,p^3 + 27\,q^2 < 0,\ \text{d'où}\ p < 0,\ 3\ \text{racines} \begin{cases} \text{racine intermédiaire calculable par A. S.} \\ \text{racines extrêmes calculables par A. S. } (x^2) \end{cases}$$

$$4\,p^3 + 27\,q^2 > 0 \begin{cases} \text{si } p < 0 \text{ racine unique calculable par A. S. } (x^2) \\ \text{si } p > 0 \text{ racine unique calculable par A. S. M.} \end{cases}$$

Ce tableau peut encore être simplifié. Il est superflu de former l'expression $4\,p^3 + 27\,q^2$. Il suffit de considérer le signe de p et de q. Voici une marche qui nous paraît donner des garanties suffisantes tout en réduisant au minimum les calculs accessoires.

Règle pratique pour la résolution de l'équation $x^3 + p\,x + q = 0$

Placer l'index de la réglette en face de $|q|$. (Cette position est définitive; tous les calculs se font ensuite exclusivement par déplacements du curseur.)

Si $p > 0$, racine unique, de signe contraire à celui de q. On la calcule par A. S. M.

Si $p < 0$, il y a *au moins* une racine de signe contraire à celui de q dont la valeur absolue est supérieure à $\sqrt{-p}$. On la calcule par A. S. (x^2) comme la plus grande en valeur absolue des racines extrêmes d'une équation à trois racines. On tente ensuite, par le même procédé, d'obtenir l'autre racine extrême. Si cette tentative échoue, c'est que l'équation proposée n'a qu'une racine. Si elle aboutit, l'équation a trois racines, et il ne reste plus qu'à calculer la troisième — racine intermédiaire — par A. S. ou A. S. M. (à volonté). On sait que cette racine est du signe de q.

M. Besson et Edm. Brasey, Fribourg.

Kleine Mitteilungen

I. *Die graphische Ermittlung der reellen Wurzeln kubischer Gleichungen*

Die Bestimmung der Schnittpunkte des Kreises

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = p^2 + q^2$$

mit der Parabel

$$y = -x^2$$

führt auf die Gleichung vierten Grades:

$$x^4 + (2\,q + 1)\,x^2 - 2\,p\,x = x\,[x^3 + (2\,q + 1)\,x - 2\,p] = 0.$$

Von den vier Wurzeln dieser Gleichung ist $x_1 = 0$, während die drei weiteren der kubischen Gleichung

$$x^3 + (2\,q + 1)\,x - 2\,p = 0$$

angehören. Da komplexe Wurzeln in einer Gleichung nur paarweise auftreten können, muß diese Gleichung dritten Grades noch eine oder drei reelle Wurzeln haben. Der Kreis geht wegen $x_1 = 0$ durch den Scheitel der Parabel und schneidet diese außerdem