Die Steinersche Hypozykloide

Autor(en): **Stoll, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **5 (1950)**

Heft 4

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-14908

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

El. Math. | Band V | Nr. 4 | Seiten 73–96 | Basel, 15. Juli 1950

Die Steinersche Hypozykloide[1])

(S) als Rollkurve und als Wallace-Hülle

Wenn sich der Primärpunkt A_1 der Tangente a um den Zentriwinkel $2w$ um O dreht, dann dreht sich a im Gegensinn um den Winkel w. Daher bildet a mit dem «Primärstrahl» OA_1 einen Winkel, der nach der Drehung um $3w$ kleiner ist als vor derselben.

Nun fällt in Figur 2 die Spitzentangente $O\mathfrak{G}''$ mit ihrem Primärstrahl zusammen. Nachdem ihr Primärpunkt durch Drehung um den Zentriwinkel $\mathfrak{G}''O\mathfrak{A}_2$ nach B_1 kommt, geht sie selber in die Tangente B_1A_0 über, die mit ihrem Primärstrahl OB_1 den Winkel $\mathfrak{A}_2B_1A_0$ bildet, welcher abgesehen vom Vorzeichen anderthalbmal so groß ist wie der genannte Zentriwinkel. A_0 aber, Schnittpunkt der Tangente mit (S), liegt auf einem Kreis (R) über dem Durchmesser $A_2\mathfrak{A}_2$ mit Mittelpunkt B_1. (R) berührt ($\mathfrak{K}$) in $\mathfrak{A}_2$ und ist 2/3 so groß wie ($\mathfrak{K}$). Folglich sind die Kreisbögen $\widehat{A_0\mathfrak{A}_2}$ und $\widehat{\mathfrak{G}''\mathfrak{A}_2}$ gleich lang. Daraus ergibt sich:

Rollt ein Kreis ohne zu gleiten auf der Innenseite eines anderthalbmal so großen Leitkreises, so beschreiben die Endpunkte eines Durchmessers von ihm dieselbe Steiner-Kurve. Sie hat den Leitkreis zum Spitzenkreis und wird außerdem von dem Durchmesser eingehüllt.

(S) *ist also eine dreispitzige Hypozykloide. Sie wird ebenfalls erzeugt, wenn der Rollkreis im Vergleich zum vorigen halb so groß ist.* In der Tat liegt A_0 auch auf einem Kreis (R') über dem Durchmesser $A_1\mathfrak{A}_1$, der ($\mathfrak{K}$) in $\mathfrak{A}_1$ berührt und 1/3 so groß ist wie der Spitzenkreis. Dabei bildet die Tangente a mit ihrem Primärstrahl OA_1 den Winkel $\mathfrak{A}_1A_1A_0$, Peripheriewinkel in (R') über $\widehat{\mathfrak{A}_1A_0}$, der anderthalbmal so groß ist wie der Zentriwinkel $\mathfrak{A}_1O\mathfrak{G}''$, also dreimal so groß wie der Peripheriewinkel über $\widehat{\mathfrak{A}_1\mathfrak{G}''}$, so daß die Kreisbögen $\widehat{\mathfrak{A}_1A_0}$ und $\widehat{\mathfrak{A}_1\mathfrak{G}''}$ gleich lang sind. Der Gegenpunkt von A_0 auf (R') erzeugt aber nicht dieselbe Kurve, sondern ihr Spiegelbild in bezug auf O.

In Figur 3 ist W ein Punkt des Umkreises des Dreiecks ABC. W_a, W_b, W_c sind die Spiegelbilder von W in bezug auf BC, CA, AB. Sie liegen auf den entsprechenden Spiegelbildern des Umkreises, die durch den Höhenschnittpunkt H gehen. Es ist deshalb nach Größe und Sinn:

$$\sphericalangle W_aHB + \sphericalangle AHW_b = \sphericalangle BCW + \sphericalangle WCA = \sphericalangle BCA = \pi - \sphericalangle BHA,$$

[1]) Erster Teil in Heft 3 (1950) dieser Zeitschrift.

d. h. der Winkel $W_a H W_b$ ist ein gestreckter. Das bedeutet: Spiegelt man einen Punkt W des Umkreises eines Dreiecks an dessen Seiten, dann liegen die drei Spiegelbilder mit dem Höhenschnittpunkt auf einer Geraden.

Ebenfalls auf einer Geraden liegen die Mitten zwischen diesen vier Punkten und W, was besagt: Fällt man von einem Punkt des Umkreises eines Dreiecks die Lote auf dessen Seiten, dann liegen die drei Fußpunkte auf einer Geraden. Diese «*Wallace-Gerade*» w oder «Simson-Gerade» hälftet in W_1 die Verbindung von W mit dem Höhenschnittpunkt H. Die Wallace-Gerade vorgeschriebener Richtung wird gefunden,

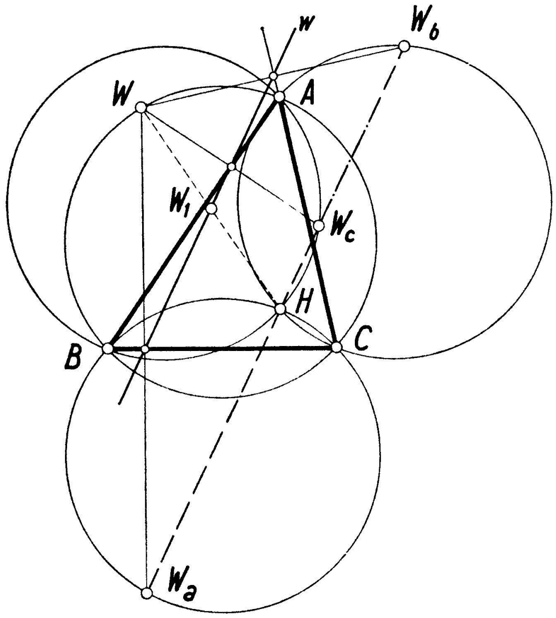

Fig. 3

indem man durch H eine Gerade dieser Richtung zieht und vom zweiten Schnittpunkt mit einem der Umkreisspiegelbilder das Lot auf die betreffende Dreiecksseite fällt: sein Fußpunkt ist ein Punkt der gesuchten.

Man erkennt auf Grund der gegebenen Herleitung ohne weiteres: Wenn sich W_1 auf dem Feuerbach-Kreis um den Zentriwinkel $2\,v$ fortbewegt, dann dreht sich w um den Winkel $-v$, d. h. die Schar der Wallace-Geraden bildet ein S-System. Und da die Höhen und Seiten des Dreiecks selber Wallace-Gerade sind, so ergibt sich: *Die Wallace-Hülle eines Dreiecks ist eine dreispitzige Hypozykloide, welche die Grundpunkte des Dreiecks zu Scheitelpunkten hat und seine Seiten und Höhen berührt.* JAKOB STEINER hat die Kurve (S) in der zitierten Arbeit als Wallace-Hülle eingeführt.

Hauptdreiecke, Theorem von Laguerre

Es gibt unter den Tangentendreiecken von (S), abgekürzt mit TD, solche, deren Höhen ebenfalls Tangenten an (S) sind. Sie heißen *Hauptdreiecke*, HD. Seine Primärpunkte sind Seitenmitten und seine Sekundärpunkte Höhenfußpunkte; sein Feuerbach-Kreis und seine Grundpunkte sind der Scheitelkreis (K) und die Scheitelpunkte von (S). Ein TD ist HD, wenn seine Primärpunkte Seitenmitten sind. Ein rechtwinkliges HD besteht aus einem Tangentenpaar und seiner Adjungierten.

Als *Nulldreieck*, ND, bezeichne ich die drei Tangenten aus einem Punkt. Die Konjugierten der Seiten eines HD sind seine Höhen, bilden also ein ND. Da sich die Konjugierten zweier Seiten eines ND auf der dritten schneiden, gilt auch das Umgekehrte. Also:

Das konjugierte eines Nulldreiecks ist ein Hauptdreieck, und umgekehrt. Beide zusammen bilden ein vollständiges orthogonales Viereck, kurz ein *Hauptviereck*, HV, und ein solches läßt sich auf vier Arten in ein HD und ND zerlegen. Zu einem HV gehören nur drei Sekundärpunkte, und die sechs Primärpunkte sind paarweise Gegenpunkte auf (K).

Der Neigungswinkel einer Tangente a gegen die Scheiteltangente g ist mod π bestimmt. Sein nichtnegativer Wert $\alpha < \pi$ werde *Laguerre-Winkel* genannt. Zufolge der Kongruenz (1) des ersten Abschnittes gilt für ein HD:

$$\alpha + \beta + \gamma \equiv 0 \pmod{\pi} \tag{3}$$

und also für ein ND:

$$\alpha + \beta + \gamma \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}. \tag{4}$$

(4) verdankt man LAGUERRE.

Bedeutet x' die Konjugierte von x und ist abc ein ND, dann ist abc' ein HD; denn c' und b' schneiden sich auf a und c' und a' auf b. Für dieses c', bei gegebenen a und b, gilt (3), und wegen der eineindeutigen Zuordnung von Tangente und Laguerre-Winkel, nur für dieses. Daraus folgt: *Die Kongruenz (3) ist für Hauptdreiecke charakteristisch und ebenso (4) für Nulldreiecke.* Daraus ergeben sich zahlreiche Folgerungen, zum Beispiel:

Wenn sich a und b auf c schneiden und ebenso d und e, dann folgt aus (4): $\alpha + \beta \equiv \delta + \varepsilon$ oder $\alpha - \delta \equiv \varepsilon - \beta$. Die erste Kongruenz bedeutet: *die Winkelhalbierenden von a und b sind parallel zu denen von d und e.* Aus der zweiten entnimmt man: *a, b und d, e sind Gegenseiten eines Kreissehnenvierecks.* Die Umkehrung gilt ebenfalls. Das Analoge ist richtig, wenn abc und cde je ein HD bilden.

Da die Evolute $(\mathfrak{S})$ von (S) gegen (S) um 180° gedreht ist, können die Tangenten von $(\mathfrak{S})$ und (S) auf dieselbe Richtung bezogen werden. Daher entnimmt man aus (3) und (4): *Die Normalen in den Berührungspunkten eines Hauptdreieckes mit (S) bilden ein Nulldreieck, und die Normalen in den Berührungspunkten der drei Tangenten aus P bilden ein Hauptdreieck von $(\mathfrak{S})$ mit P als Schwerpunkt.* Das letztere folgt daraus, daß das Normalendreieck in bezug auf O im Verhältnis $3:1$ invers homothetisch ist zum Hauptdreieck von (S) mit P als Höhenschnittpunkt.

Nach (4) hat die Adjungierte $\bar{a}$ von a den Laguerre-Winkel $\bar{\alpha} \equiv \pi/2 - 2\alpha$, und da α durch $\bar{\alpha}$ nur mod $\pi/2$ bestimmt ist, findet man von neuem, daß eine Tangente stets einem Paar adjungiert ist. Aus $\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} \equiv \pi/2 - 2(\alpha + \beta + \gamma)$ folgt: *Die Adjungierten eines Haupt- oder eines Nulldreiecks bilden ein Nulldreieck.* Und nimmt man von jedem von drei Paaren, deren Adjungierte ein ND bilden, eine Tangente, so erhält man ein HD oder ein ND, d. h. *wenn die Adjungierten dreier Paare durch einen Punkt gehen, dann bilden die drei Paare ein Hauptviereck.*

Wenn a, b, c ein gleichschenkliges Dreieck mit a als Basis bilden, dann ist $\beta - \alpha \equiv \alpha - \gamma$ und also $\pi/2 - 2\alpha \equiv \pi/2 - (\beta + \gamma)$, d.h. *bei einem gleichschenkligen Tangentendreieck geht die Adjungierte der Basis durch die Spitze.*

Ist $abcd$ ein Tangentenvierseit, dann sind die Laguerre-Winkel der dritten Tangenten aus (a, b) und (c, d) kongruent mod π zu $\pi/2 - (\alpha + \beta)$ und $\pi/2 - (\gamma + \delta)$, so daß der Laguerre-Winkel der dritten Tangente durch ihren Schnittpunkt $\equiv \pi/2 + \alpha + \beta + \gamma + \delta$ ist. Wegen der Symmetrie in den vier gegebenen Winkeln folgt daraus: *Bei einem Tangentenvierseit von (S) schneiden sich die dritten Tangenten aus jedem der drei Paare von Gegenecken auf einer weiteren Tangente.*

Ähnliche Tangentendreiecke

Wenn sich die Primärpunkte eines TD um gleiche Bögen auf (K) verschieben, dann drehen sich die Seiten des TD um gleiche Winkel; das TD ändert wohl seine Größe und Lage, nicht aber seine Form. Wenn umgekehrt zwei TD gleichsinnig ähnlich sind, dann unterscheiden sich die Laguerre-Winkel entsprechender Seiten um gleiche Winkel, und die Dreiecke ihrer Primärpunkte – kurz *Primärdreiecke*, PD, genannt – gehen durch bloße Drehung auseinander hervor. Also:

Zwei Tangentendreiecke sind dann und nur dann gleichsinnig ähnlich, wenn ihre Primärdreiecke gleichsinnig kongruent sind.

Dreht sich das PD, dann dreht sich das zugehörige *Sekundärdreieck*, SD – Dreieck der Sekundärpunkte –, im Gegensinn um den doppelten Winkel. Gleichsinnig ähnliche TD haben also auch gleichsinnig kongruente SD, aber nicht umgekehrt. Konjugierte TD haben dasselbe SD und ihre PD sind in bezug auf O symmetrisch.

Nun läßt sich, dank (3), der Drehwinkel der Seiten eines TD mod $\pi/3$ und also der Drehwinkel seines PD mod $2\pi/3$ so bestimmen, daß das TD HD wird. Dann aber sind die Primärpunkte Seitenmitten, und man erkennt: *Tangentendreiecke sind zu ihrem Primärdreieck gleichsinnig ähnlich.*

Beim HD ist der Umkreismittelpunkt U_0 Höhenschnittpunkt des PD und der Höhenschnittpunkt H_0 einer der Berührungskreismittelpunkte des SD. Nach dem am Schluß des ersten Abschnittes Erwähnten gilt daher: *Die Umkreismittelpunkte U und die Höhenschnittpunkte H* aller gleichsinnig ähnlichen und folglich auch, wegen der axialen Symmetrie von (S), *aller ähnlichen Tangentendreiecke liegen auf ein und demselben Kreis (O) um O.*

U dreht sich auf (O) mit dem PD und H mit dem SD, beide gegenläufig und H doppelt so schnell wie U. Daraus erhellt: *Die Euler-Geraden aller gleichsinnig ähnlichen Tangentendreiecke umhüllen eine dreispitzige Hypozykloide (E); ihr Scheitelkreis ist der Kreis (O) über U_0H_0 als Durchmesser, und H_0 ist Scheitelpunkt.* Ferner: *Ein Hauptdreieck ist unter allen ähnlichen Tangentendreiecken das größte.*

Da der Schwerpunkt S UH im Verhältnis 1:2 teilt, folgt weiter: *Die Schwerpunkte aller gleichsinnig ähnlichen Tangentendreiecke liegen auf einer dreispitzigen Hypozykloide (s), Evolvente von (E).*

Die Euler-Geraden UH und $U'H'$ zweier konjugierter TD sind normal zueinander und daher im System (E) konjugiert (Figur 4). Daraus ergibt sich: *Konjugierte Tangentendreiecke haben den Höhenschnittpunkt gemeinsam, ihre Umkreismittelpunkte sind* *in bezug auf O symmetrisch, und die Summe ihrer Flächen ist gleich der Fläche des ähnlichen Hauptdreiecks.*

Unter dem *abgeleiteten Dreieck* eines TD versteht man das Dreieck der dritten Tangenten durch seine Ecken. Diese dritten Tangenten sind zu den entsprechenden Seiten des PD normal, so daß das abgeleitete zum Grunddreieck gleichsinnig ähnlich ist und sich um dessen Ecken in analoger Weise dreht wie dieses um sein PD. Daher: *Das abgeleitete eines Tangentendreiecks ist zu diesem gleichsinnig ähnlich, und dessen Höhenschnittpunkt ist sein Umkreismittelpunkt.*

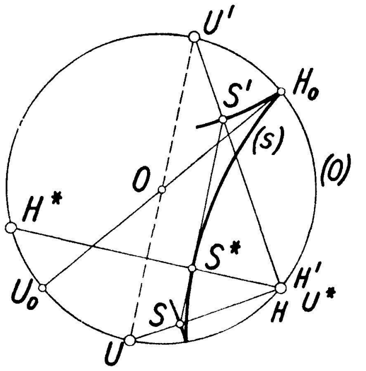

Fig. 4

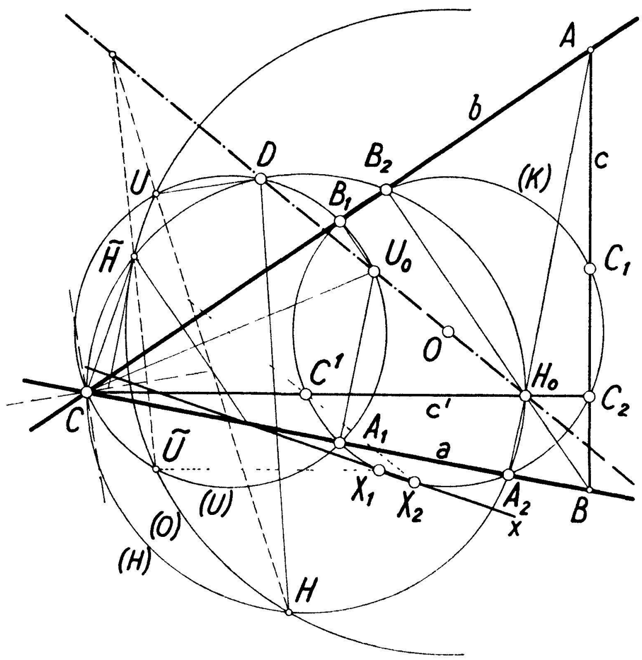

Fig. 5

Ferner haben konjugierte TD ihr abgeleitetes gemeinsam, weil ihre PD seitenparallel sind, und dessen Euler-Gerade U^*H^* hat als Tangente von (E) die in Figur 4 gezeichnete Lage normal zu UU'. Die Schwerpunkte S, S' und S^* der drei TD liegen daher auf einer Geraden, welche zudem (s) in S^* berührt und in S und S' schneidet. Da das Höhenquadrat eines rechtwinkligen Dreieckes halb so groß ist wie das harmonische Mittel der Kathetenquadrate, so folgt schließlich:

Die Schwerpunkte konjugierter Tangentendreiecke haben bei allen ähnlichen Paaren gleichen Abstand. Sie liegen mit dem Schwerpunkt des gemeinsamen abgeleiteten Dreiecks auf einer Geraden, und die Fläche des Abgeleiteten ist doppelt so groß wie das harmonische Mittel der Flächen des Grundpaares.

Tangentendreiecke mit zwei festen Seiten

Unter der Schar abx aller TD mit festem a und b und variablem x gibt es genau ein HD abc; c ist konjugiert zur dritten Tangente c' durch den Schnittpunkt C von a und b. In Figur 5 sind a, b, c, c' und x samt ihren Primär- und Sekundärpunkten dargestellt.

Wenn der Primärpunkt X_1 von x auf (K) wandert, dann bewegt sich der Umkreismittelpunkt U von abx als Höhenschnittpunkt von $A_1B_1X_1$ auf dem zu (K) in bezug auf A_1B_1 symmetrischen Kreis (U). Der Höhenschnittpunkt H von abx ist einer der Berührungskreismittelpunkte von $A_2B_2X_2$, und da der Winkel $A_2X_2B_2$ und folglich auch A_2HB_2 nach Größe und Sinn unverändert bleibt, bewegt sich H auf einem Kreis (H) durch A_2 und B_2.

Beide Kreise gehen durch C als Scheitel des ND. Sind U_0 und H_0 Umkreismittelpunkt und Höhenschnittpunkt des HD, so sind U_0A_1 und H_0A_2 normal zu a, so daß CU_0 Durchmesser von (U) ist und CH_0 Durchmesser von (H). Die Euler-Gerade U_0H_0 des HD geht also durch den zweiten Schnittpunkt D von (U) und (H). Zudem ist C^1 Zentrum von (H).

Zu jedem Dreieck der Schar abx gibt es in ihr ein gegensinnig ähnliches. Die Euler-Geraden UH und $\tilde{U}\tilde{H}$ eines solchen Paares liegen daher so, daß deren Winkelhalbierende parallel sind zu den Winkelhalbierenden von a und b. Außerdem liegen die Punkte $U, \tilde{U}, H, \tilde{H}$ auf einem Kreis (O) um O.

Weil X_1U stets normal ist zu A_1B_1, bewegt sich U auf (U) mit derselben Winkelgeschwindigkeit wie X_1 auf (K). X_2H geht als Halbierende des Winkels $A_2X_2B_2$ dauernd durch C^1 (nicht durch C_1, entsprechend dem Spezialfall C_2C oder C_2H_0), dreht sich also um das Zentrum von (H) mit der Hälfte der Winkelgeschwindigkeit, mit der sich X_2 auf (K) bewegt. U und H verschieben sich somit auf ihren Kreisen mit gegenläufig gleicher Winkelgeschwindigkeit, so daß die Peripheriewinkel U_0DU und H_0DH entgegengesetzt gleich sind. Mithin sind die Sekanten DU und DH von (O) symmetrisch in bezug auf dessen Zentrale DO.

Hieraus folgt die Gleichheit der Winkel UDH und UOH, so daß jedes Paar U, H mit D und O auf einem Kreise liegt. Deshalb schneiden sich die Geraden DO, UH und $\tilde{U}\tilde{H}$ als Potenzlinien dreier Kreise in ein und demselben Punkt. Also:

Die Umkreismittelpunkte U und die Höhenschnittpunkte H aller Tangentendreiecke von (S) mit zwei festen Tangenten a und b durch C liegen je auf einem Kreis (U) bzw. (H). (U) und (H) schneiden sich in C und in einem Punkt der Euler-Geraden des einzigen Hauptdreiecks der Schar. Jedem Dreieck der Schar entspricht in ihr ein gegensinnig ähnliches, und die Euler-Geraden eines solchen Paares schneiden sich auf der Euler-Geraden des Hauptdreiecks mit Winkelhalbierenden parallel zu denen von a und b.

Da die Euler-Gerade eines rechtwinkligen Dreiecks durch den Scheitel des rechten Winkels und die Mitte der Hypotenuse geht, ergibt sich der bemerkenswerte Spezialfall: Verbindet man in einem Dreieck die Mitte einer Seite mit dem Höhenfußpunkt einer zweiten Seite und die Mitte derselben mit dem Höhenfußpunkt der ersten, dann schneiden sich diese Geraden auf der Euler-Geraden des Dreiecks, und ihre Winkelhalbierenden sind parallel zu denen der beiden Dreiecksseiten.

A. STOLL, Zürich.

Zum zweiten Hauptsatz der Thermodynamik

Es ist eine bekannte Tatsache, daß die Thermodynamik dem Physikschüler oft besondere Schwierigkeiten bereitet, die von ganz anderem Charakter sind als etwa in den übrigen Gebieten der Physik. Nach meinen eigenen Erfahrungen und denen von anderen sind es oft die mathematisch begabten Schüler, die diesen Schwierigkeiten