Zum Drallsatz für den starren Körper

Autor(en): **Prokop, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **4 (1949)**

Heft 3

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-14322

durch x geteilt und $x=0$ gesetzt:

$$\frac{1}{2q+1}\binom{-1}{2q}+\frac{1}{2q+1}\binom{-1}{2q}=A_1,$$

also

$$A_1=\frac{2}{2q+1}.$$

Gleichung (4) lautet jetzt

$$\binom{x}{2q+1}-\binom{-x}{2q+1}-\frac{2}{2q+1}\binom{x}{1}=A_{2q+1}\,x^{2q+1}+A_{2q-1}\,x^{2q-1}+\cdots+A_3\,x^3.$$

Wird $x=1,2,\ldots,n$ eingesetzt und summiert, so ergibt sich wegen (2):

$$\binom{n+1}{2q+2}+\binom{-n}{2q+2}-\frac{2}{2q+1}\binom{n+1}{2}=A_{2q+1}\,S_{2q+1}(n)+\cdots+A_3\,S_3(n). \tag{5}$$

Die linke Seite von Gleichung (5) ist aber gleich

$$\frac{n\,(n+1)}{(2q+1)\,(2q+2)}\left[\binom{n-1}{2q}+\binom{-n-2}{2q}-2q-2\right].$$

Durch die Substitution $n-1=(t-3)/2$, also $t=2n+1$, nimmt der Klammerausdruck folgende Form an:

$$\binom{\frac{t-3}{2}}{2q}+\binom{\frac{-t-3}{2}}{2q}-2q-2=\text{gerade Funktion von } t.$$

Diese gerade Funktion verschwindet aber für $t=\pm 1$, denn

$$\binom{-1}{2q}+\binom{-2}{2q}-2q-2=1+2q+1-2q-2=0.$$

Der Ausdruck ist deshalb durch $t^2-1=4\,(n^2+n)$ teilbar, so daß Gleichung (5) wird:

$$n^2\,(n+1)^2 F_{q-1}\,[(2n+1)^2]=A_{2q+1}\,S_{2q+1}(n)+\cdots+A_3\,S_3(n). \tag{6}$$

Indem man in Gleichung (6) nacheinander $2q+1=3, 5, 7, \ldots$ einsetzt, ergibt sich die Richtigkeit der Formel b).

Die Berechnung der Koeffizienten von $S_p(n)$ wird erleichtert, wenn man sich der Identität bedient:

$$S_p(n)-S_p(n-1)\equiv n^p.$$

H. KREIS, Winterthur.

Zum Drallsatz für den starren Körper[1]

1. *Zum Drallsatz bei ebener Bewegung*

Für die Rotation eines starren Körpers um eine raum- und körperfeste Achse gilt bekanntlich der Drallsatz in der Form:

$$\Theta\,\frac{d\omega}{dt}=M, \tag{1}$$

[1]) Dieser Artikel ist ein Auszug aus einem vom Verfasser bearbeiteten Paragraphen des demnächst im Reinhardt-Verlag, Basel, erscheinenden Buches *Grundriß der Physik* von Prof. Dr. P. HUBER und Prof. P. FRAUENFELDER.

worin t die Zeit, Θ das Trägheitsmoment des Körpers für die Drehachse, ω die Winkelgeschwindigkeit und M die Summe der Drehmomente aller am Körper angreifenden Kräfte bezüglich der Drehachse bedeuten. Bewegt sich ein starrer Körper *eben* (d. h. bewegen sich alle seine Teilchen parallel zu einer festen Ebene E, der Bewegungsebene) und bedeuten Θ_s, M_s die zu Θ, M analogen Größen in bezug auf die Schwerachse normal zur Bewegungsebene, so gilt weiter:

$$\Theta_s \frac{d\omega}{dt} = M_s . \tag{2}$$

ω ist darin die Winkelgeschwindigkeit in bezug auf ein System, das mit dem Schwerpunkt verbunden ist und sich translatorisch bewegt. Ein Index erübrigt sich insofern, als die Winkelgeschwindigkeit bezüglich aller translatorisch bewegten Systeme, die mit irgendeinem Körperpunkt verbunden sind, die gleiche ist.

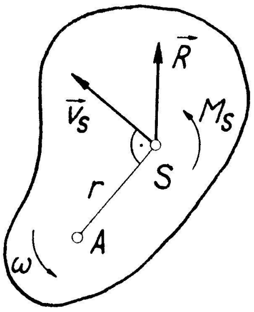

Fig. 1. Die Momentanachse d steht in A senkrecht zur Zeichenebene.

Nun kann jede ebene Bewegung eines starren Körpers momentan als Rotation um eine bestimmte Gerade normal zur Bewegungsebene, die *Momentanachse*, aufgefaßt werden. So rotiert etwa ein Rad, das auf einer Ebene geradlinig rollt ohne zu gleiten, momentan um die Berührungsmantellinie. Man kann sich nun fragen, unter welchen Bedingungen der Drallsatz in der Form (1) auch bezüglich dieser Momentanachse gelte. Die Antwort lautet: Dies ist der Fall, wenn der Abstand des Schwerpunktes von der Momentanachse zeitunabhängig ist (wie etwa beim rollenden Rad).

Diese unseres Wissens wenig bekannte Beziehung erlaubt bei manchen Problemen eine Vereinfachung der Rechnungen, wie an Beispielen gezeigt werden wird.

Zum Beweis des Satzes denken wir uns zuerst alle am Körper angreifenden Kräfte äquivalent ersetzt durch die Einzelkraft $\vec{R}$ im Schwerpunkt und das Drehmoment M_s um die Schwerachse normal zur Bewegungsebene. Der Schwerpunktsatz liefert dann einen Zusammenhang zwischen $\vec{R}$ und der Schwerpunktsbeschleunigung. Ist r der Abstand des Schwerpunktes S von der Momentanachse d (Fig. 1) *und ist dieser Abstand zeitunabhängig*, so hat die Tangentialkomponente der Schwerpunktsbeschleunigung den Betrag $r\,(d\omega/dt)$. Die Voraussetzung der zeitlichen Konstanz von r ist dabei wesentlich; andernfalls tritt ein Zusatzglied infolge der Änderung von r auf!

Für die Tangentialkomponente der Kraft $\vec{R}$ ergibt sich also, wenn m die Masse des Körpers bedeutet:

$$R_{\mathrm{tg}} = m\, r \frac{d\omega}{dt} .$$

Damit können wir die Summe M_d der Drehmomente aller Kräfte bezüglich der Momentanachse d berechnen. Sie ist:

$$M_d = M_s + r \cdot m\, r \frac{d\omega}{dt}.$$

Addieren wir jetzt auf beiden Seiten der Gleichung (2) den Ausdruck $m\, r^2\, d\omega/dt$, so erhalten wir auf der rechten Seite gerade M_d. Die linke Seite wird

$$(\Theta_s + m\, r^2) \frac{d\omega}{dt}.$$

Nach dem Satz von STEINER ist der Ausdruck in der Klammer das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich d. Daher gilt:

$$\Theta_d \frac{d\omega}{dt} = M_d. \tag{3}$$

Ist bei ebener Bewegung eines starren Körpers der Abstand des Schwerpunktes von der Momentanachse zeitunabhängig, so kann der Drallsatz so formuliert werden, wie wenn die Momentanachse raumfeste Drehachse wäre.

Beispiel 1: Auf einer horizontalen, rauhen, aber undeformierbaren Ebene rolle ein Rad ohne zu gleiten unter dem Einfluß einer horizontalen Zugkraft $\vec{Z}$ normal zur Radachse geradeaus (Fig. 2). Nach (3) gilt dann:

$$\Theta_d \frac{d\omega}{dt} = a\, Z,$$

woraus sich die Bewegung berechnen läßt.

Mit dem Drallsatz bezüglich der Schwerachse dagegen erhält man

$$\Theta_s \frac{d\omega}{dt} = a\, R$$

und muß noch den Schwerpunktsatz

$$m \frac{d^2 x_s}{dt^2} = m\, a \frac{d\omega}{dt} = Z - R$$

zu Hilfe nehmen, um R zu eliminieren.

Beispiel 2: An einer vertikalen Mauer lehne eine Leiter mit der Länge $2\,a$ (Fig. 3). Die Reibung werde vernachlässigt. Die Leiter wird dann gleiten, und solange ihr oberes Ende die Wand noch berührt, geht die Momentanachse durch den Schnittpunkt der Wirkungslinien der Auflagerkräfte. Ihr Abstand vom Schwerpunkt ist dann a und daher zeitlich konstant. Die Bewegung wird durch den Winkel φ vollständig beschrieben, und für ihn gilt nach (3):

$$(\Theta_s + m\, a^2) \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\, m\, g\, a \cos\varphi. \tag{4}$$

Daraus läßt sich die Funktion $\varphi(t)$ bestimmen.

Ohne Benützung von (4) wird die Rechnung bedeutend umständlicher:
Drallsatz für die Schwerachse:

$$\Theta_s \frac{d^2\varphi}{dt^2} = H\, a \sin\varphi - V\, a \cos\varphi. \tag{5}$$

Schwerpunktsatz:
$$m\,\frac{d^2x_s}{dt^2}=H, \tag{6}$$
$$m\,\frac{d^2y_s}{dt^2}=V-G. \tag{7}$$

Geometrische Bedingungen:
$$x_s=a\cos\varphi\,;\quad y_s=a\sin\varphi. \tag{8}$$

Nun hätte man mit Hilfe von (8) aus (6) und (7) H und V als Funktionen von φ zu berechnen und in (5) einzuführen.

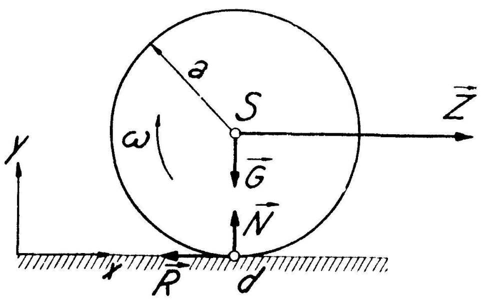

Fig. 2

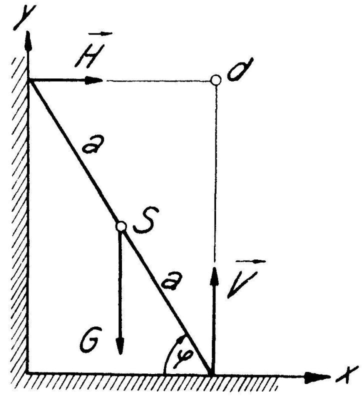

Fig. 3

2. *Zum allgemeinen Drallsatz*

Bekanntlich ist das resultierende (vektorielle) Moment aller an einem Massenpunkthaufen angreifenden Kräfte in bezug auf einen Punkt A dann gleich der zeitlichen Ableitung des Dralls des Punkthaufens bezüglich des gleichen Punktes, wenn A entweder raumfest oder der Systemschwerpunkt ist. Gewöhnlich wird zuerst die erste

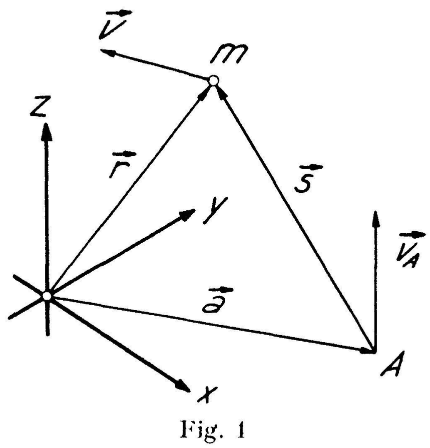

Fig. 1

Aussage bewiesen und dann daraus die zweite gefolgert[1]). Durch Spezialisierung erhält man weiter die Gleichungen (1) und (2). Im folgenden sei noch gezeigt, wie man alle diese Aussagen und ferner noch Gleichung (3) als Spezialfälle einer etwas allgemeineren Beziehung erhalten kann.

---

[1]) Vgl. etwa: E. MEISSNER† und H. ZIEGLER, *Mechanik*, Bd. II: *Dynamik der starren Körper* (Birkhäuser, Basel 1947).

Ein Massenpunkt m bewege sich beliebig. Seine Lage in einem raumfesten Koordinatensystem sei durch den Ortsvektor $\vec{r}$ gegeben (Fig. 4). Seine Geschwindigkeit ist dann $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, sein Impuls $\vec{J} = m\vec{v}$. Ferner sei A ein beliebig bewegter Raumpunkt, dessen Lage durch den Ortsvektor $\vec{a}$ beschrieben werde. Der Vektor von A nach m sei mit $\vec{s}$ bezeichnet, so daß

$$\vec{s} = \vec{r} - \vec{a}. \tag{9}$$

Der Drall von m bezüglich A ist das Vektorprodukt

$$\vec{D}_A = [\vec{s}, \vec{J}].$$

Diese definierende Gleichung gilt für jede Zeit t und darf daher nach t differenziert werden:

$$\frac{d\vec{D}_A}{dt} = \left[\vec{s}, \frac{d\vec{J}}{dt}\right] + \left[\frac{d\vec{s}}{dt}, \vec{J}\right].$$

Hierin ersetzen wir im zweiten Glied der rechten Seite nach (9) $\vec{s}$ durch $\vec{r} - \vec{a}$ und erhalten:

$$\frac{d\vec{D}_A}{dt} = \left[\vec{s}, \frac{d\vec{J}}{dt}\right] + \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{J}\right] - \left[\frac{d\vec{a}}{dt}, \vec{J}\right].$$

Nach dem Impulssatz ist $\dot{\vec{J}}$ gleich der Resultierenden aller an m angreifenden Kräfte, und daher bedeutet das erste Glied der rechten Seite das Moment $\vec{M}_A$ aller Kräfte bezüglich A. Das zweite Glied verschwindet, da $d\vec{r}/dt = \vec{v}$ parallel zu $\vec{J} = m\,\vec{v}$ ist. Im letzten Glied ist $d\vec{a}/dt$ die Geschwindigkeit $\vec{v}_A$ von A, so daß wir erhalten:

$$\frac{d\vec{D}_A}{dt} = \vec{M}_A - [\vec{v}_A, \vec{J}]. \tag{10}$$

Dies ist der Drallsatz für einen Massenpunkt bezüglich eines bewegten Raumpunktes A. Für ein ganzes System von Massenpunkten sind Drall, resultierendes Moment und Impuls die Summen der betreffenden Größen für die Einzelteilchen. Stellt man also (10) für alle Einzelteilchen auf und summiert dann, so erhält man, da Summation und Differentiation vertauschbar sind und das Vektorprodukt distributiv ist, eine Gleichung von derselben Form, in der nun $\vec{D}_A$, $\vec{M}_A$, $\vec{J}$ die totalen Größen für das ganze System bedeuten. *In diesem Sinne gilt also* (10) *auch für ein System von Massenpunkten.*

Aus (10) erhält man nun einerseits den Drallsatz bezüglich eines raumfesten Punktes, wenn man $\vec{v}_A = 0$ setzt, andererseits den Drallsatz in bezug auf den Schwerpunkt, indem man $\vec{v}_A$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_S$ des Schwerpunktes identifiziert. Das Vektorprodukt in (10) verschwindet auch im zweiten Fall, da der Impuls des Systems proportional zu $\vec{v}_S$ ist.

Aus diesen beiden Sätzen erhält man die Gesetze (1) und (2), indem man nur die Orthogonalprojektionen der auftretenden Vektoren auf die raumfeste Drehachse bzw. die Schwerachse normal zur Bewegungsebene betrachtet. Wir verzichten darauf, diese bekannten Überlegungen hier zu wiederholen, sondern wollen nur noch zeigen, wie man auf analoge Weise das Gesetz (3) aus (10) erhält.

Der Körper bewege sich eben, d sei die Momentanachse, und als Bezugspunkt A wählen wir den Fußpunkt des Lotes vom Schwerpunkt auf d. Die Orthogonalprojektion von $\vec{M}_A$ auf d ist die Summe M_d der statischen Momente aller Kräfte bezüglich

d. Die Projektion von $\vec{D}_A$ hat den Wert $\Theta_d\,\omega$, da die Geschwindigkeitsverteilung die einer Rotation um d ist. Da sich d translatorisch verlagert, sind ferner Projektionsbildung und Ableitung nach der Zeit vertauschbar, so daß die Projektion von $d\vec{D}_A/dt$ auf d durch $d(\Theta_d\,\omega)/dt$ gegeben wird. Das Vektorprodukt $[\vec{v}_A, \vec{J}]$ steht normal zur Bewegungsebene, ist also parallel zu d. Seine Projektion auf d verschwindet daher genau dann, wenn es selbst 0 ist. Wenn wir von den trivialen Fällen $\vec{v}_A \equiv 0$ und $\vec{J} \equiv 0$ absehen, ist das dann und nur dann der Fall, wenn $\vec{v}_A$ und $\vec{J}$ dauernd parallel sind. $\vec{J} = m\,\vec{v}_S$ steht wegen der Rotation um d senkrecht zum Abstand r des Schwerpunktes von der Momentanachse (Fig. 1). Also muß dies auch für $\vec{v}_A$ der Fall sein. Dann sind aber die Orthogonalprojektionen von $\vec{v}_A$ und $\vec{v}_S$ auf r beide 0, und dies ist gleichbedeutend damit, daß die Länge von r sich nicht ändert. Diese Bedingung ist also notwendig und hinreichend dafür, daß die Projektion von $[\vec{v}_A, \vec{J}]$ auf d verschwindet. Ist sie erfüllt, so wird wegen des Satzes von STEINER auch Θ_d zeitunabhängig, und man erhält aus (10) das Gesetz (3):

$$\frac{d}{dt}\,(\Theta_d\,\omega) = \Theta_d\,\frac{d\omega}{dt} = M_d\,.$$

W. PROKOP, Winterthur.

Kleine Mitteilungen

I. *Der Zusammenhang zwischen dem Berührungsproblem von Apollonius und einer Aufgabe der darstellenden Geometrie*[1])

Für das Berührungsproblem von APOLLONIUS, bei dem die Kreise gesucht werden, die drei gegebene Kreise berühren, ist von GERGONNE folgende Lösung angegeben worden:

Sind etwa diejenigen beiden Kreise gesucht, die alle drei gegebenen Kreise k_i ($i = 1$, 2, 3) von außen bzw. umschließend berühren, so suche man die Pole P_i der äußeren Ähnlichkeitsachse der k_i. Verbindet man diese Pole mit dem Potenzzentrum P der k_i, so schneiden diese Geraden die k_i in den sechs Berührungspunkten der beiden gesuchten Kreise.

Einen planimetrischen Beweis findet man etwa in DÖRRIE, *Triumph der Mathematik*.

Es ist nun bemerkenswert, daß man diese Konstruktion zwangsläufig erhält, wenn man die Aufgabe löst, die gemeinsamen Punkte S von drei Rotationskegeln mit parallelen Achsen und gleichen Öffnungswinkeln mit den Methoden der darstellenden Geometrie zu finden. Setzt man nämlich einen Drehkegel mit demselben Öffnungswinkel so in die andern hinein, daß er sie berührt, so wird seine Spitze in den gemeinsamen Schnittpunkt S der drei gegebenen Kegel zu liegen kommen, und ein beliebiger ebener Schnitt senkrecht zu den Kegelachsen zeigt, daß mit der Konstruktion dieses Punktes S die Apolloniussche Kreisaufgabe gelöst ist. Zu diesem Zwecke wird man nun, da sich ähnliche Drehkegel mit parallelen Achsen bekanntlich in ebenen Kurven, Hyperbeln,schneiden, die drei Hyperbelebenen zu schneiden versuchen und dabei feststellen, daß sie eine Schnittgerade gemeinsam haben. Diese ist dann noch mit einem der Kegel zu durchstoßen. Bei der Durchführung der Konstruktion wird man gewahr, daß sie sich

---

[1]) Dieser Zusammenhang findet sich im Rahmen der Theorie der «Zyklographischen Abbildungen», d. h. einer Zuordnung der orientierten Kreise der Ebene zu den Punkten des Raumes, dargestellt bei E. MÜLLER, *Vorlesungen über darstellende Geometrie*, Bd. 2: *Zyklographie* (Deuticke, Leipzig und Wien 1923), und bei FIEDLER, *Darstellende Geometrie*, Bd. 1 (Teubner, Leipzig 1883). Zur weiteren Orientierung über derartige Abbildungen vgl. etwa KLEIN, *Höhere Geometrie* (Springer, Berlin 1926).