# Gerade und ungerade Permutationen in geordneter Reihenfolge

Autor(en): **Aigner, Alexander**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **4 (1949)**

Heft 3

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-14320

# Gerade und ungerade Permutationen in geordneter Reihenfolge

Man ordnet einerseits die $n!$ Permutationen von $n$ verschiedenen Elementen lexikographisch an, so daß jede eine bestimmte Nummer $N$ erhält; andererseits unterscheidet man zwischen geraden und ungeraden Permutationen. Die vorliegende Arbeit gilt nun dem Zusammenhang zwischen diesen beiden Gesichtspunkten.

Es ist nun keineswegs so, daß eine Permutation mit gerader lexikographischer Nummer auch eine gerade Permutation im Sinne der Theorie ist. Wohl aber ergibt sich der Charakter der Permutation eindeutig aus ihrer Nummer $N$, und zwar als alleinige Funktion dieser Zahl, unabhängig von der Anzahl der Elemente $n$. (Wir denken uns $n$ so groß genommen, daß $n! \geqq N$ wird.) Das sei im Folgenden gezeigt.

Der Einfachheit halber nehmen wir als permutierte Elemente die Zahlen 1, 2, 3, ..., $n$ selbst und als Grundstellung ihre natürliche Reihenfolge. Ferner bezeichnen wir die Permutation mit der lexikographischen Nummer $N$ kurz mit $P_N$; dann ist $P_1$ die Identität, das Einheitselement der symmetrischen Gruppe. Weiterhin ordnen wir, wie es auch sonst üblich ist, den geraden Permutationen das Vorzeichen $+$, den ungeraden das Vorzeichen $-$ zu.

Ist nun
$$a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n$$
irgendeine Permutation der Zahlen von 1 bis $n$, so ergibt sich die Nummer $N$ dieser Permutation nach der bekannten Formel der Kombinatorik

$$N - 1 = k_1\,(n-1)! + k_2\,(n-2)! + \cdots + k_{n-1} \cdot 1!,$$

wobei $k_1$ die Anzahl der Vorgänger von $a_1$ in der natürlichen Reihe ist, $k_2$ die Anzahl der Vorgänger von $a_2$ unter den übrigen $n-1$ Zahlen ohne $a_1$, $k_3$ die Anzahl der Vorgänger von $a_3$ unter den Zahlen außer $a_1$ und $a_2$ usw. (im besonderen also stets $k_1 = a_1 - 1$). Diese Koeffizienten $k$ bilden ein eindeutiges System, und zwar geht $k_1$ von 0 bis $n-1$, $k_2$ von 0 bis $n-2$, allgemein $k_i$ von 0 bis $n-i$.

Zugleich ist aber $k_1$ die Anzahl der Inversionen, welche dadurch entstehen, daß das Element $a_1$ an erster Stelle steht; $k_2$ weitere Inversionen kommen beim Vergleich mit $a_2$ zustande usw., so daß die Gesamtzahl der Inversionen der betreffenden Permutation $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = \Sigma\, k$ beträgt. Daher ergibt sich ihr Vorzeichen

$$\operatorname{sign} P_N = (-1)^{k_1 + k_2 + \cdots + k_n} = (-1)^{\Sigma k}$$

aus der durch die Nummer $N$ eindeutig gegebenen obigen Darstellung.

So ergibt z. B. für $N = 43$ die Formel

$$42 = 1 \cdot 24 + 3 \cdot 6 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1$$
$$\operatorname{sign} P_{43} = (-1)^{1+3} = +1;$$

oder für $N = 178$

$$177 = 1 \cdot 120 + 2 \cdot 24 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$$
$$\operatorname{sign} P_{178} = (-1)^{1+2+1+1+1} = +1.$$

Die 43. und die 178. sind also gerade Permutationen.

Dieses Ergebnis läßt sich auch auf anderem Wege gewinnen, wo wir außerdem einen klaren Einblick in die Aufeinanderfolge der Vorzeichen erhalten. Wir zerlegen die Reihe aller $n!$ Permutationen in $n$ Perioden der größten Ordnung $(n-1)!$, welche alle mit demselben Element beginnenden Permutationen zusammenfassen; dann zerlegen wir jede solche Größtperiode in die $n-1$ Perioden zweitgrößter Ordnung $(n-2)!$, welche mit denselben 2 Elementen beginnen, usw. Alle Permutationen einer Periode der Ordnung $i!$ beginnen mit denselben $n-i$ Elementen, während die restlichen $i$ Elemente alle Permutationen in geordneter Reihenfolge durchlaufen.

Nun nehmen wir zwei benachbarte Perioden der Ordnung $i!$, welche aber derselben Periode nächsthöherer Ordnung $(i+1)!$ angehören sollen, und vergleichen sie gliedweise miteinander. Die beiden Glieder tragen dann etwa die Nummern

$$r(i+1)! + si! + t \quad \text{und} \quad r(i+1)! + (s+1)i! + t,$$

wobei : $0 \leqq s < i$ sein muß und $1 \leqq t \leqq i!$ ist. Und sie haben die Gestalt

$$\begin{array}{llll} a_1 \ldots a_{n-i-1} & b_1 \ldots b_2 & \ldots b_{i+1}, \\ a_1 \ldots a_{n-i-1} & b_2 \ldots b_1 & \ldots b_{i+1}. \end{array}$$

Denn der Übergang von der ersten zur zweiten Stellung vollzieht sich so: Anfangs bleiben $n-i-1$ Elemente $(a)$ unverändert; von den $i+1$ folgenden $(b)$ wird das zunächst erststehende $b_1$ durch das unter ihnen nächstgrößere $b_2$ ersetzt, und hierauf wird unter den $i$ übrigen Stellen dieselbe Anordnung hergestellt wie früher. Dadurch kommt aber $b_1$ an den Platz von $b_2$ und jedes andere $b$ an seinen alten Platz, weil $b_1$ als Größennachbar von $b_2$ zwischen den übrigen $b$ genau dieselbe Stellung einnimmt wie vorhin $b_2$. ($b_1$ ist nicht das größte $b$, also $b_2$ vorhanden, weil die erstbetrachtete Periode nicht die letzte in ihrer Überperiode war.)

Der Übergang zur anderen Stellung ist also lediglich die Transposition $(b_1\, b_2)$, daher haben die beiden verglichenen Permutationen immer entgegengesetztes Vorzeichen.

Jeder solche Periodenübergang (zu einer Nachbarperiode ohne Überschreiten einer Überperiode) bringt somit einen Vorzeichenwechsel. Aus lauter solchen Übergängen (gleicher oder verschiedener Ordnung) läßt sich aber jeder beliebige Übergang unschwer zusammensetzen. Gehen wir von der ersten Permutation $P_1$, der natürlichen Reihenfolge aus, welcher das positive Zeichen zukommt, zur Permutation mit der Nummer $N$, wobei

$$N - 1 = k_1 (n-1)! + k_2 (n-2)! + \cdots + k_{n-1} \cdot 1!,$$

so wird die Anzahl der Vorzeichenänderungen

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1} = \Sigma k$$

und somit

$$\operatorname{sign} P_N = (-1)^{\Sigma k},$$

wie wir es vorhin hatten.

Dieser Einblick ins Gefüge der Perioden liefert auch eine Übersicht über die Folge der Vorzeichen der angeordneten Permutationen. Die kleinste Periode ist die «Einserperiode», d. h. das Einzelglied selbst, und innerhalb der nächsten, der Zweierperiode, müssen ihre Vorzeichen alternieren. Eine Permutation mit ungerader Nummer und die mit der darauffolgenden geraden Nummer haben immer entgegengesetztes Vorzeichen:

$$\operatorname{sign} P_{2r-1} = -\operatorname{sign} P_{2r}$$

Eine Tatsache, die sofort einleuchtet, da diese Permutationen sich nur durch Vertauschung ihrer beiden letzten Elemente unterscheiden.

Ganz allgemein nehmen die Perioden einer beliebigen Ordnung $i!$ nur zwei, und zwar einander entgegengesetzte Zeichenfolgen an; und diese alternieren innerhalb einer nächst höheren Periode regelmäßig. Für die Sechserperiode sind es die Zeichenfolgen $+ - - + + -$ und $- + + - - +$. In jeder Periode gibt es gleichviel Plus- und Minuszeichen.

Niemals kommen drei gleiche Zeichen hintereinander. In der Regel ist jedem Zeichen das übernächste entgegengesetzt, es herrscht also der viergliedrige Wiederholungstyp $+ + - -$, ausgenommen an den Grenzen der 24erperioden, wo z. B. an den Stellen 23, 24, 25, 26 die Zeichenfolge $- + - +$ erscheint. Diese Abweichung unterbleibt jedoch bei den Vielfachen von $6!$, tritt aber wieder auf bei denen von $8!$ usw., abwechselnd in Ausnahmen und Gegenausnahmen.

ALEXANDER AIGNER, Graz.

# Über die Potenzsummen der natürlichen Zahlen

Die Summe

$$S_p(n) \equiv 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p$$

der Potenzen der $n$ ersten natürlichen Zahlen für ganzzahlige positive Exponenten $p$ ist bekanntlich durch ein Polynom von $n$ des Grades $p + 1$ darstellbar. Abgesehen vom uneigentlichen Fall

$$S_1(n) = \frac{n\,(n+1)}{2},$$

muß, wie nachher bewiesen wird, dieses Polynom von folgender Gestalt sein:

a) bei einem geraden Exponenten $p = 2\,q$:

$$S_{2q}(n) = n\,(n+1)\,(2\,n+1)\,P_{q-1}\,[(2\,n+1)^2],$$

b) bei einem ungeraden Exponenten, größer als 1, $p = 2\,q + 3$:

$$S_{2q+3}(n) = n^2\,(n+1)^2\,P_q\,[(2\,n+1)^2],$$

wo $P$ ein Polynom des Grades $q - 1$ bzw. $q$ des Quadrates von $(2\,n + 1)$ bedeutet. Es ist beispielsweise:

$$S_2(n) = \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6},$$

$$S_4(n) = \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{120}\,[3\,(2\,n+1)^2 - 7],$$

$$S_6(n) = \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{672}\,[3\,(2\,n+1)^4 - 18\,(2\,n+1)^2 + 31],$$

$$S_3(n) = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4},$$