

# Kleine Mitteilungen

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **4 (1949)**

Heft 1

PDF erstellt am: **20.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

halb der beiden Dreiecke gelegene Stück  $V_1V_2$  bei der Verschneidung der beiden Tetraeder tatsächlich auftritt.

In das Dreieck  $B_1C_1D_1$  schneidet auch noch das Dreieck  $B_2C_2D_2$  ein, dessen Grundspuren  $A_1D_2$  und  $B_2C_2$  sind. Die gleichartigen Spuren schneiden sich in den Mittelpunkten der Kanten  $B_1C_1$  und  $B_2C_2$ . Verbindet man diese beiden Mittelpunkte, so erhält man die Trägergerade der tatsächlich auftretenden Verschneidung  $U_1V_2$  der beiden jetzt betrachteten Dreiecke.

Die Abb. 3 zeigt die Außenansicht der Seitenwand  $B_1C_1D_1$  mit den beiden an ihr auftretenden Verschneidungslinien  $V_1V_2$  und  $U_1V_2$ . Den in der Ebene des gleichseitigen Dreiecks  $B_1C_1D_1$  gelegenen Punkt  $A_2$  erhält man, wenn man den Umkreis halbmesser  $r$  dieses Dreiecks, vom Punkt  $D_1$  aus, auf der durch ihn gezogenen Parallelen zu  $B_1C_1$  nach rechts abträgt. Trägt man auf dieser Parallelen von  $D_1$  aus in entgegengesetzter Richtung die Strecke  $r/2$  ab, so erhält man den Mittelpunkt der Kante  $B_2C_2$ .

Aus den in Abb. 3 gezogenen Linien ersieht man, daß  $U_1$  die Strecke  $B_1D_1 = a$  im Verhältnis  $a:r = \sqrt{3}:1$  teilt. Daher ist

$$D_1U_1 = \frac{a}{\sqrt{3}+1} = \frac{a}{2}(\sqrt{3}-1) = h - \frac{a}{2},$$

worin  $h$  die Längenmaßzahl der Höhe des gleichseitigen Dreiecks  $B_1C_1D_1$  angibt. Auf Grund dieser Formel liegt der Punkt  $U_1$ , und demnach auch der Punkt  $V_1$ , auf demjenigen Kreis mit dem Mittelpunkt  $D_1$ , der jenen Halbkreis berührt, den man über  $B_1C_1$  als Durchmesser zeichnen kann und der auf derselben Seite von  $B_1C_1$  liegt wie  $D_1$  (Abb. 4).

Da die Außenansicht jeder der sechs Seitenflächen der beiden Tetraeder mit Abb. 3 bzw. 4 übereinstimmt, so läßt sich von den in Abb. 2 dargestellten und sich gegenseitig durchdringenden speziellen Möbiusschen Tetraedern auch leicht ein Modell anfertigen. (Schluß folgt im nächsten Heft.)

ARNULF REUSCHEL, Wien.

## Kleine Mitteilungen

### I. Zur Schätzung des Ellipsenumfangs

Es sei  $E$  eine Ellipse mit den Halbachsen  $a$  und  $b$ ,  $a \neq b$ . Der Flächeninhalt von  $E$  ist

$$F = \pi a b \quad (1)$$

und für den Umfang  $L$  von  $E$  gilt die bekannte Relation

$$L > \pi(a + b). \quad (2)$$

Für diese Ungleichung wollen wir einen kurzen Beweis skizzieren, der sich beispielsweise auf der Mittelschulstufe ohne Mühe durchführen läßt.

Es bezeichne  $\bar{E}$  die Ellipse mit den Halbachsen  $a + \varrho$ ,  $b + \varrho$  die mit  $E$  konzentrisch und achsenparallel in normaler Lage in einem Koordinatensystem liegen soll. Betrachten wir nun zwei parallele Tangenten an  $E$  und an  $\bar{E}$  mit dem Richtungskoeffizienten  $m$ , wobei  $0 < |m| < \infty$  gelten soll, so ergibt sich für den Abstand  $\Delta$  dieser Tangenten die

Beziehung  $\Delta \sqrt{1+m^2} = \sqrt{(a+\varrho)^2 m^2 + (b+\varrho)^2} - \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$ . Es wird behauptet, daß für  $\varrho > 0$  stets

$$\Delta < \varrho \quad (3)$$

gilt. Andernfalls wäre nämlich

$$\varrho \sqrt{1+m^2} + \sqrt{a^2 m^2 + b^2} \leq \sqrt{(a+\varrho)^2 m^2 + (b+\varrho)^2},$$

woraus durch Quadrieren und Kürzen zunächst

$$\sqrt{1+m^2} \sqrt{a^2 m^2 + b^2} \leq a m^2 + b,$$

und sodann

$$a^2 + b^2 \leq 2 a b,$$

oder auch

$$(a-b)^2 \leq 0$$

hervorgehen würde, ein Ergebnis also, das im Hinblick auf die Voraussetzung  $a \neq b$  einen Widerspruch darstellt.

Es sei nun weiter  $P$  der äußere Parallelbereich zu  $E$  im Abstand  $\varrho$ , dessen Tangenten also von den an  $E$  gezogenen parallelen Tangenten genau den Abstand  $\varrho$  aufweisen. Nach dem Resultat (3) ist die Ellipse  $\bar{E}$  als echter Teil im Eibereich  $P$  enthalten. Der Flächeninhalt von  $\bar{E}$  wird demnach kleiner sein müssen als derjenige von  $P$ .

Nach einer bekannten Formel von J. STEINER<sup>1)</sup> gilt für den Flächeninhalt  $F_\varrho$  des äußeren Parallelbereiches  $P$

$$F_\varrho = F + L \varrho + \pi \varrho^2, \quad (4)$$

so daß im Hinblick auf die Flächenformel (1) nunmehr die Beziehung

$$\pi a b + L \varrho + \pi \varrho^2 > \pi (a + \varrho) (b + \varrho)$$

folgt. Hieraus resultiert die gewünschte Ungleichung (2).

Es sei noch erwähnt, daß sich für das isoperimetrische Defizit der Ellipse noch die Ungleichung

$$L^2 - 4 \pi F > \pi^2 (a-b)^2 \quad (5)$$

ergibt.

H. HADWIGER, Bern.

## II. Ein Satz über Quadratsummen

Aus der elementaren Algebra ist bekannt, daß in  $(a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2$  stets

$$a_1^2 + a_2^2 \geq 2 a_1 a_2, \quad (1)$$

welche Ungleichung unmittelbar aus  $(a_1 - a_2)^2 \geq 0$  folgt. Das Gleichheitszeichen gilt nur im Falle  $a_1 = a_2$ .

Der entsprechende Satz für  $n$  positive Größen  $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$  lautet

$$(n-1) \sum_1^n a_i^2 \geq 2 \sum a_i a_k = 2 \sum \zeta a_i, \quad (i \neq k) \quad (2)$$

wenn wir mit  $\zeta a_i$  eine Kombination zur 2. Klasse aus den  $n$  Größen  $a_i$  verstehen und  $\Sigma \zeta a_i$  die Summe der  $\binom{n}{2}$  verschiedenen solchen Kombinationen bedeutet.

Der Beweis ist einfach: Es sind  $\Sigma a_i = s_1$  und  $\Sigma \zeta a_i = s_2$  die erste und zweite elementarsymmetrische Funktion der  $n$  Größen  $a_i$ , und  $M_1 = s_1/n$  bzw.  $M_2 = \sqrt{\frac{s_2}{\binom{n}{2}}}$  deren

<sup>1)</sup> Die Formel ist für konvexe Polygonbereiche elementar und folgt für beliebige konvexe Bereiche, also beispielsweise für die Ellipse, leicht durch Grenzübergang.

erster und zweiter grundlegender algebraischer Mittelwert. Nachdem stets  $M_1 \geq M_2$  (s. diese Zeitschrift, Bd. III, Nr. 3, Seite 59), folgt

$$\left(\frac{s_1}{n}\right)^2 \geq \frac{s_2}{\binom{n}{2}}$$

oder 
$$\frac{n(n-1)}{2} [\Sigma a_i^2 + 2 \Sigma a_i a_k] \geq n^2 \Sigma a_i a_k$$

und damit 
$$(n-1) \Sigma a_i^2 \geq 2 \Sigma a_i a_k, \quad (i \neq k), \quad \text{w. z. b. w.}$$

Auch dieser Satz läßt sich unschwer noch verallgemeinern. Wir bezeichnen mit  $\zeta a_i$  eine Kombination zur  $t$ -ten Klasse der  $n$  Größen  $a_i$ . Dann ist die über alle  $\binom{n}{t}$  verschiedenen solcher Kombinationen erstreckte Summe  $\Sigma \zeta a_i = s_t$  die  $t$ -te elementarsymmetrische Funktion. Ferner bezeichnen wir mit  ${}_t p_2$  die Quadratsumme der  $\binom{n}{t}$  verschiedenen  $\zeta a_i$ , also  $\Sigma (\zeta a_i)^2 = {}_t p_2$ . So ist z. B.  ${}_2 p_2$  für  $n = 3$  gleich  $(a_1 a_2)^2 + (a_1 a_3)^2 + (a_2 a_3)^2$ . Die Quadratsummen  ${}_t p_2$  sind ganze symmetrische Funktionen der  $a_i$  und müssen sich nach dem Fundamentalsatz der Theorie der symmetrischen Funktionen ganz und rational durch die  $s_t$  darstellen lassen, und zwar eindeutig. Ausgehend von der bekannten Relation

$${}_1 p_2 = s_1^2 - 2 s_2, \tag{3}$$

findet man durch Induktion

$$\begin{aligned} {}_t p_2 &= s_t^2 - 2 \sum_1^t s_{t-k} s_{t+k} (-1)^{k+1} \\ &= \left(\sum \zeta a_i\right)^2 - 2 \sum_1^t \left(\sum_{t+k} \zeta a_i\right) \left(\sum_{t-k} \zeta a_i\right) (-1)^{k+1}, \end{aligned} \tag{4}$$

wobei  $s_0 = 1, s_m = 0$  für  $m \begin{cases} > n \\ < 0 \end{cases}$ .

Die Darstellung ist, wie gesagt, eindeutig, und wenn sie richtig ist, muß sie auch noch gelten, wenn alle  $a_i$  einander gleichgesetzt werden, was eine Überprüfungsmöglichkeit ergibt. Nachdem  ${}_t p_2$  wie  $s_t$  aus  $\binom{n}{t}$  Summanden besteht, folgt, wenn alle  $a = 1$  sind:

$$\binom{n}{t} = \binom{n}{t}^2 - 2 \sum_1^t \binom{n}{t-k} \binom{n}{t+k} (-1)^{k+1}, \quad \binom{n}{m} = 0 \quad \text{für} \quad m \begin{cases} > n \\ < 0 \end{cases}. \tag{5}$$

Diese Gleichung aber ist richtig, denn sie ist nur eine Umformung einer bekannten Formel der Kombinatorik, nämlich

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} \binom{n}{r} - \binom{n}{1} \binom{n}{r-1} + \binom{n}{2} \binom{n}{r-2} - \dots + \binom{n}{r} \binom{n}{0} (-1)^k \\ = \begin{cases} \binom{n}{r/2} (-1)^{r/2} & \text{für } r \text{ gerade} \\ 0 & \text{für } r \text{ ungerade} \end{cases}, \end{aligned}$$

welche sich aus dem Koeffizientenvergleich bei Binomialentwicklung von  $(1+x)^n(1-x)^n$  einerseits und  $(1-x^2)^n$  andererseits ergibt.

Nach (3) ist  $s_1^2 = {}_1 p_2 + 2 s_2$ , wobei gemäß (2) gilt  $(n-1) {}_1 p_2 \geq 2 s_2$ , und die Verallgemeinerung wird nun darin bestehen, für die rechte Seite der aus (4) folgenden Darstellung

$$s_t^2 = {}_t p_2 + 2 \Sigma s_{t-k} s_{t+k} (-1)^{k+1} \tag{6}$$

eine analoge Beziehung anzugeben. Nun kann man offenbar aus  ${}_t p_2$ , das aus einer Summe von  $\binom{n}{t}$  Quadraten  $(\zeta a_i)^2$  besteht, auf  $\binom{\binom{n}{t}}{2} = 1/2 \binom{n}{t} \left[\binom{n}{t} - 1\right]$  verschiedene

Arten ein Quadratpaar herausheben; nach (5) ist somit diese Zahl auch gleich  $\sum_k \binom{n}{t-k} \binom{n}{t+k} (-1)^{k+1}$ . Jedes dieser Quadratpaare ist nach (1) größer als das doppelte Basisprodukt. Die Summe der Quadratpaare gibt eine Zahl von doppelt soviel, d. h.  $\binom{n}{t} \left[ \binom{n}{t} - 1 \right] = 2 \sum \binom{n}{t-k} \binom{n}{t+k} (-1)^{k+1}$  einzelnen Quadraten. Dies ist aber auch die resultierende Summandenzahl des Terms  $2 \sum s_{t-k} s_{t+k} (-1)^{k+1}$  in (6), d. h. die doppelte Zahl der Basisprodukte der Quadratsumme  ${}_t p_2$ . Da nun aber  ${}_t p_2$  selbst nur aus  $\binom{n}{t}$  Quadraten besteht, muß die gesuchte Beziehung lauten:

$$\left[ \binom{n}{t} - 1 \right] {}_t p_2 \geq 2 \sum s_{t-k} s_{t+k} (-1)^{k+1}. \quad (7)$$

Für  $t = 1$  folgt aus (7) wieder (2), und ist hierbei speziell  $n = 2$ , ergibt sich (1).

HEINRICH JECKLIN.

### III. Zur Herleitung der Tangentengleichung eines Kegelschnittes

Die übliche Herleitung der Gleichung einer Kegelschnitttangente, wenn Berührungspunkt und Gleichung der Kurve bekannt sind, benutzt entweder offen oder verkappt (GANTER und RUDIO) die Analysis oder vielleicht in den einfachen Fällen die sogenannte Diskriminantenmethode. Es besteht jedoch ein weiterer methodisch interessanter *rein algebraischer Weg* (ohne Grenzwertbetrachtungen), der die Diskriminante vermeidet und verhältnismäßig wenig Rechnung erfordert.

Die nun zu schildernde Methode beginnt wie die Diskriminantenmethode. Um ihre Nützlichkeit eindrücklich nachzuweisen, wenden wir sie auf den Kegelschnitt in allgemeiner Lage an.

Sei also  $P_1(x_1, y_1)$  der Kurvenpunkt und

$$k \equiv a x^2 + b x y + c y^2 + d x + e y + f = 0$$

die Gleichung des Kegelschnittes. Die Gleichung der Tangente kann so angesetzt werden:  $t \equiv y - y_1 = m(x - x_1)$ , wobei das Steigungsmaß  $m$  gemäß der Bedingung zu bestimmen sein wird, daß  $t$  und  $k$  den Punkt  $P_1$  gemeinsam haben.

Aus dem linearquadratischen Gleichungssystem

$$\begin{cases} a x^2 + b x y + c y^2 + d x + e y + f = 0 \\ y = m x - (m x_1 - y_1) \end{cases}$$

erhält man die nach  $x$  geordnet angeschriebene Gleichung

$$(a + b m + c m^2) x^2 - [b(m x_1 - y_1) + 2 c m(m x_1 - y_1) - d - e m] x + \dots = 0, \quad (1)$$

worin das von  $x$  freie Glied punktiert angedeutet wurde.

Diese Gleichung muß nun die Doppelwurzel  $x_1$  haben (Tangente!). Hier trennen sich die zwei Wege. Nach der Diskriminantenmethode würde man jetzt die Diskriminante der Gleichung (1) gleich 0 setzen, was aber die volle Kenntnis des punktiert angedeuteten Gliedes verlangen und eine mühsame Rechnung nach sich ziehen würde. Der andere Weg benutzt den 1. Teil des Satzes von VIETA. Nach diesem folgt aus (1):

$$x_1 + x_1 = \frac{b(m x_1 - y_1) + 2 c m(m x_1 - y_1) - d - e m}{a + b m + c m^2},$$

also:

$$2 a x_1 + 2 b m x_1 + 2 c m^2 x_1 = b m x_1 - b y_1 + 2 c m^2 x_1 - 2 c m y_1 - d - e m.$$

und hieraus:  $m(b x_1 + 2 c y_1 + e) = -(2 a x_1 + b y_1 + d)$

Schließlich:  $m = -\frac{2 a x_1 + b y_1 + d}{b x_1 + 2 c y_1 + e}$ .

Mit der Bestimmung von  $m$  ist aber das Tangentenproblem erledigt.

V. KRAKOWSKI, Zürich.