Ein Beweis des Satzes von H.J.S. Smith und H. Kortum

Ein Beweis des Satzes von H. J. S. Smith und H. Kortum

1. Dieser bekannte Satz ist der folgende:

Liegt ein von einem Kreise abweichender Kegelschnitt in der Ebene gezeichnet vor, so kann man die reellen Wurzeln jeder Gleichung vierten oder dritten Grades mit reellen Koeffizienten mit Zirkel und Lineal aus den Koeffizienten konstruieren.

Dieser Satz wurde von TH. VAHLEN elementar bewiesen[1]; unser Beweis ist noch einfacher.

Jede Gleichung vierten Grades läßt sich in der Form

$$f(x) = x^4 + p x^2 + q x + r = 0 \tag{1}$$

schreiben. Im Falle $r = 0$, $q \neq 0$ genügen die von Null verschiedenen Wurzeln von (1) der Gleichung

$$x^3 + p x + q = 0$$

dritten Grades.

Zum Beweis des Satzes können wir annehmen, daß p, q und r reell sind und daß die Gleichung (1) keine mehrfache Wurzel besitzt. Hat nämlich die Gleichung eine mehrfache Wurzel, so kann man diese Wurzel durch rationale Operationen ausrechnen. Die Wurzeln von (1) sind dann mit Zirkel und Lineal ohne Benützung des gezeichneten Kegelschnittes konstruierbar.

Die Gleichung (1) hat eine gerade Anzahl von reellen Wurzeln. Wir können annehmen, daß sie mindestens zwei verschiedene reelle Wurzeln besitzt.

2. Ist der gezeichnete Kegelschnitt eine *Parabel*, so läßt sich ihre Gleichung in einem geeignet gewählten rechtwinkligen Koordinatensystem in der Form

$$P(x, y) \equiv y - x^2 = 0 \tag{2}$$

schreiben. Die Wurzeln der Gleichung (1) sind die Abszissen der Schnittpunkte der Parabel P und des Kreises K mit der Gleichung

$$\begin{aligned} K(x,y) &\equiv x^2 + y^2 + q\,x + (p-1)\,y + r \\ &\equiv \left(x + \frac{q}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{p-1}{2}\right)^2 - \left[\frac{q^2}{4} + \frac{(p-1)^2}{4} - r\right] = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Dieser Kreis K ist reell, weil er von der Parabel P in mindestens zwei reellen Punkten geschnitten wird. Er läßt sich aus den Strecken von den Längen p, q und r leicht konstruieren.

3. Die Schnittpunkte des Kreises K mit der Parabel P sind dieselben, wie mit einem beliebigen Kegelschnitt des Büschels

$$K(x,y) + \lambda\, P(x,y) \equiv (1-\lambda)\, x^2 + y^2 + q\,x + (p - 1 + \lambda)\, y + r = 0. \tag{4}$$

Ist der gezeichnete Kegelschnitt eine *Ellipse* E^* mit den Halbachsen a und b, so ist der Kegelschnitt (4), für den

$$1 - \lambda = \frac{b^2}{a^2}$$

[1] TH. VAHLEN, Arch. der Math. u. Phys. III, Bd. 3 (1901), S. 112; Konstruktionen und Approximationen, Teubners Lehrbücher der mathematischen Wissenschaften, Bd. XXXIII (1911).

gilt, eine zu E^* ähnliche Ellipse E. Sie ist reell, weil sie mit K mindestens zwei reelle Punkte gemeinsam hat. Führt die Ähnlichkeitstransformation T die Ellipse E in E^* über, so kann man mit Zirkel und Lineal aus einem beliebigen Punkt Q der Ebene den Punkt Q^* bzw. Q^{-1} leicht konstruieren, der dem Punkt Q bei der Transformation T bzw. bei ihrer Inversen entspricht. Die Transformation T führt K in einen Kreis K^* über. Die inverse Transformation T^{-1} führt die reellen Schnittpunkte von E^* und K^* in die reellen Schnittpunkte von E und K über. Diese Schnittpunkte und damit ihre Abszissen, d.h. die reellen Wurzeln der Gleichung (1), sind also konstruierbar.

4. Ist der gezeichnete Kegelschnitt eine *Hyperbel* H^* mit den Halbachsen a und b, so gibt es im Kegelschnittbüschel (4) im allgemeinen zwei Hyperbeln H_1 und H_2, deren Asymptoten zu den Asymptoten von H^* parallel sind. Für diese Hyperbeln ist

$$\lambda - 1 = \frac{b^2}{a^2} \quad \text{bzw.} \quad \lambda - 1 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Wir können annehmen, daß weder H_1 noch H_2 in zwei Geraden zerfällt. Zerfiele nämlich die Hyperbel H_1 in zwei Geraden, so könnte man die Geraden und ihre Schnittpunkte mit dem Kreise K ohne H^* konstruieren.

Bezeichnet H' die zu H^* konjugierte Hyperbel, so sind H_1 und H^* oder H_1 und H' ähnliche Hyperbeln. Dies gilt auch für die Hyperbel H_2.

Sind H_1 und H^* ähnliche Hyperbeln, so bestimmt man die reellen Schnittpunkte der Kurven H_1 und K durch Ähnlichkeitstransformationen ebenso wie vorher die reellen Schnittpunkte der Kurven E und K.

Es ist möglich, daß beide Hyperbeln H_1 und H_2 zu H' ähnlich sind. Führt die Ähnlichkeitstransformation T H_1 in die Hyperbel H', K in den Kreis K' über, so führt T^{-1} die reellen Schnittpunkte von H' und K' in die reellen Schnittpunkte der Kurven H_1 und K über. Die Abszissen dieser Schnittpunkte sind reelle Wurzeln von (1), weil H_1 ein Kegelschnitt des Büschels (4) ist.

Zum Beweis des Satzes müssen wir nur zeigen, daß man auf Grund der gezeichneten Hyperbel H^* die reellen Schnittpunkte der Kurven H' und K' mit Zirkel und Lineal konstruieren kann.

Ist nämlich

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{bzw.} \quad x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \tag{5}$$

die Gleichung der Hyperbel H' bzw. des Kreises K' und ist $P_k^* = (x_k^*, y_k^*)$ ein Schnittpunkt der Hyperbel H^* mit dem aus K' leicht konstruierbaren Kreise K^*

$$x^2 + y^2 + \frac{b}{a} B x + \frac{a}{b} A y + C + a^2 - b^2 = 0, \tag{6}$$

so ist
$$P_k' = (x_k', y_k') = \left(\frac{a}{b} y^*, \frac{b}{a} x^*\right) \tag{7}$$

ein Schnittpunkt der Kurven H' und K'.

Die Hyperbel H' bzw. H^* hat die Gleichungen

$$x = a \sec t \quad \text{und} \quad y = b \operatorname{tg} t \quad \text{bzw.} \quad x = a \operatorname{tg} t \quad \text{und} \quad y = b \sec t. \tag{8}$$

Die zu den Schnittpunkten der Kurven H' und K' bzw. H^* und K^* gehörigen Parameterwerte t genügen also derselben Gleichung

$$(a^2 + b^2) \operatorname{tg}^2 t + A a \sec t + B b \operatorname{tg} t + C + a^2 = 0. \tag{9}$$

Ist t_k eine Wurzel dieser Gleichung, so sind

$$x_k' = a \sec t_k\,, \quad y_k' = b \operatorname{tg} t_k \quad \text{bzw.} \quad x_k^* = a \operatorname{tg} t_k\,, \quad y_k^* = b \sec t_k \tag{10}$$

die Koordinaten eines Schnittpunktes der Kurven H' und K', bzw. H^* und K^*.

Damit ist der Satz auch für den Fall einer gezeichneten Hyperbel bewiesen.

5. Der Satz von SMITH und KORTUM läßt sich auf folgende Weise verallgemeinern: *Liegt ein von einem Kreis abweichender Kegelschnitt in der Ebene gezeichnet vor, so kann man die Wurzeln jeder Gleichung vierten oder dritten Grades mit Zirkel und Lineal konstruieren.*

Die Berechnung der Wurzeln einer Gleichung vierten oder dritten Grades erfordert nämlich außer rationalen Operationen Berechnung von Quadratwurzeln und von Kubikwurzeln. Die Konstruktion der Quadratwurzel aus einer Zahl A erfordert die Konstruktion von $\sqrt{|A|}$ und die Halbierung des Winkels Arg A. Beide Konstruktionen sind mit Zirkel und Lineal ausführbar. Die Konstruktion von $\sqrt[3]{A}$ erfordert die Konstruktion von $\sqrt[3]{|A|}$, das heißt ein Delisches Problem und die Dreiteilung des Winkels Arg A. Beide Probleme lassen sich auf Gleichungen mit reellen Koeffizienten zurückführen. Sie sind also nach dem Satz von SMITH und KORTUM konstruierbar.

GYULA (JULIUS) v. SZ. NAGY, Szeged (Ungarn).

Über die Anzahl der stabilen Ruhelagen eines Würfels

Herrn GEORG FABER zum 70. Geburtstag gewidmet

1. Was im Lateinischen «cubus» heißt (englisch «cube», französisch «cube», italienisch «cubo», holländisch «kubus» usw.), dafür haben wir im Deutschen das vom Wort «werfen» kommende Wort «Würfel». Dieses Wort dient uns aber nicht nur zur Bezeichnung derjenigen geometrischen Figur, die man auch «Hexaeder» nennt, sondern ebenso zur Benennung jenes Körpers von dieser Gestalt, der zum «Würfelspiel» verwendet wird, mit dem also wirklich «geworfen» wird. Demgegenüber haben andere Sprachen für solche «Spielwürfel» besondere Namen (game at «dice»; jouer aux «dés», giocare ai «dadi»; dobbelen – «dobbelsteen, teerling»), so daß in ihnen die Ausdrucksweise der Geometer nicht zugleich jene der Glücksritter ist.

Nun ist ein Würfelspiel auch mit anderen geworfenen Körpern als solchen von kubischer (hexaedrischer) Gestalt möglich, und man könnte z.B. auch oktaedrische «Würfel» nehmen, wobei wir hier – wie im Titel – das Wort «Würfel» im allgemeinen Sinn eines Körpers verwenden, mit dem geworfen wird.

Es handelt sich dann um die Anzahl der Ruhelagen eines solchen geworfenen Körpers und um die Frage, welches die Chancen einer jeden dieser Ruhelagen sind[1]).

Dabei kann man die Betrachtung auf konvexe Körper beschränken, wenn man solche aus inhomogenem Material nicht ausschließt. Liegt nämlich ein nichtkonvexer Würfelkörper $\mathfrak{L}$ vor, so kann man den kleinsten konvexen Körper $\mathfrak{K}$ betrachten, der $\mathfrak{L}$ umfaßt[2]) und dabei $\mathfrak{K}$ als inhomogen auffassen, insofern in dem zur Ergänzung

---

[1]) Auf die Beurteilung dieser Chancen, speziell wenn sie nicht für alle Ruhelagen gleich groß sind, komme ich in einem Aufsatz *Würfelspiel und Integralgeometrie* zu sprechen. (Sitz.-Ber. Bayr. Akad. Wiss., Math.-naturw. Kl., Sitzung 4. Oktober 1946, Jg. 1945/46, S. 131–158.)

[2]) Bekanntlich heißt $\mathfrak{K}$ nach CARATHÉODORY die «konvexe Hülle» von $\mathfrak{L}$.