Die Präzession und Nutation der Erde

Autor(en): **Schürer, M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **3 (1948)**

Heft 3

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-13574

Esistono allora su Φ' tre posizioni di P', siano P'_i $(i = 1, 2, 3)$, tali che i suddetti punti Q', Q'_1, Q'_2 relativi a ciascuna risultano (distinti e) situati con A' sopra un cerchio Π'_i.

Il punto P'_i è il punto di contatto dell'unico cerchio per A' e O'_i tangente altrove a Φ'.

Per qualunque permutazione k, r, s degli indici 1, 2, 3 *si ha che i punti A', O'_k, P'_r, P'_s sono conciclici; e il cerchio circoscritto al triangolo $A'N'P'_k$ appartiene sia al fascio individuato da Ω'_r ed Ω'_s che a quello individuato da Π'_r e Π'_s.*

5. Supponendo invece l'involuzione I_3^2 segata sopra una cubica gobba dai piani di una stella si ottiene, fra altro, il teorema:

Siano: Γ una cubica sghemba; O un punto generico fuori di essa; S_1 ed S_2 i punti di appoggio della bisecante di Γ uscente da O; ω_1, ω_2, ω_3 i piani per O osculatori a Γ; e O_k il punto di contatto di ω_k $(k = 1, 2, 3)$. Allora:

1) *Su Γ esistono tre punti M_1, M_2, M_3, non complanari con O, tali che l'ulteriore intersezione di Γ col piano per O tangente a Γ in M_k e i punti di contatto delle due ulteriori tangenti a Γ, dopo quella in M_k, incidenti alla retta OM_k giacciono con O in un piano μ_k $(k = 1, 2, 3)$.*

2) *I punti M_1, M_2, M_3 sono ordinatamente i coniugati armonici, su Γ, dei punti O_1, O_2, O_3 rispetto ai punti S_1 ed S_2.*

3) *Il punto M_k è quello di contatto dell'unica tangente di Γ incontrante la retta OO_k altrove che in O_k.*

4) *Essendo k, r, s una permutazione qualsiasi degli indici* 1, 2, 3, *i punti O_k, M_r, M_s sono complanari con O. Inoltre: il piano dei punti S_1, S_2, M_k; quello dei coniugati armonici, su Γ, di ciascuno di essi rispetto agli altri due; e i piani ω_r ed ω_s osculatori a Γ in O_r ed O_s passano per una stessa retta formando un gruppo armonico.*

5) *Il triedro di spigoli OM_1, OM_2, OM_3 corrisponde in una polarità nella stella di centro O al triedro di faccie μ_1, μ_2, μ_3; come pure (in un'altra polarità) a quello di faccie ω_1, ω_2, ω_3.*

AMBROGIO LONGHI, Lugano.

Die Präzession und Nutation der Erde

In den Physiklehrbüchern wird die Präzessionsbewegung der Erde meist nur ganz kurz im Zusammenhang mit der Theorie des Kreisels erwähnt. Dabei wird sie in vielen Fällen, wenn nicht gerade falsch, so doch mindestens unklar dargestellt. Dies rührt wohl daher, daß die Theorie ziemlich verwickelt und zudem der Begriff der Nutation in der Physik ein etwas anderer als in der Astronomie ist, so daß sich leicht Verwechslungen einstellen. Im allgemeinen findet man die Darstellung, daß sich der Präzessionsbewegung der Erde sogenannte Nutationen *überlagern*, die dem Mondknotenumlauf zuzuschreiben sind und deshalb eine $18^2/_3$jährige Periode besitzen. Die Zerlegung der Erdachsenbewegung in Präzession und Nutation ist jedoch rein formaler Natur und hat keinen physikalischen Grund. Die Präzession der Erde ist eine ungleichförmige, die durch einen säkularen Anteil (Potenzreihe nach der Zeit) und einen periodischen Anteil (Fourier-Reihe mit den Argumenten Sonnen- und Mondlänge, Mondknoten usw.) dargestellt werden kann. Den säkularen Anteil nennt man in der Astronomie die Präzession, den periodischen die Nutation.

Wenn man die Bewegung der Erdachse nur in erster Näherung betrachtet und eine Reihe von Vereinfachungen vornimmt, dann läßt sich dieser Sachverhalt ziemlich elementar darstellen. Wir benutzen aus der Theorie der Kreiselbewegung die Formel:

$$\frac{d\mathfrak{S}}{dt} = \mathfrak{M},$$

wo $\mathfrak{S}$ der Schwungvektor und $\mathfrak{M}$ das auf den rotierenden Körper ausgeübte Drehmoment bedeuten. Bei einem rasch rotierenden symmetrischen Kreisel, bei welchem außerdem die Figurenachse mit der Drehachse und der Schwungachse nahezu zusammenfallen, wie dies bei der Erde der Fall ist, kann man in erster Näherung den Schwungvektor mit der Drehachse und der Figurenachse beständig identifizieren.

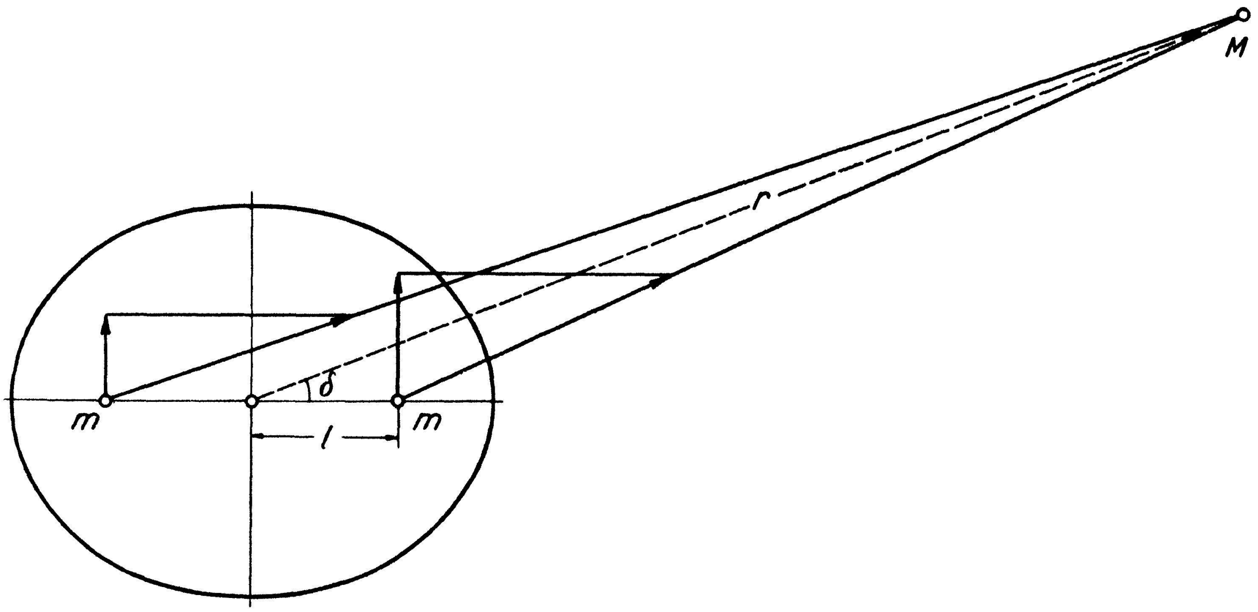

Fig. 1

Das Drehmoment wird durch die Gravitationswirkung von Sonne und Mond auf den Äquatorwulst der Erde hervorgerufen.

Um dieses Drehmoment zu berechnen, denken wir uns den Äquatorwulst durch zwei Massenpunkte in der Äquatorebene und im Meridian der Sonne bzw. des Mondes ersetzt, die vom Erdmittelpunkt einen Abstand l besitzen. Die Massenpunkte m und der Abstand l seien so gewählt, daß dadurch das gleiche Drehmoment entsteht wie das auf den Äquatorwulst ausgeübte. Es ist nicht nötig, diese Größen, die mit der Abplattung der Erde zusammenhängen, zahlenmäßig zu berechnen, da sie direkt in die sogenannte Präzessionskonstante eingehen, die in der Astronomie empirisch bestimmt wird. Ist f die Gravitationskonstante, r der Radiusvektor der einwirkenden Masse M (Sonne oder Mond) und δ deren Deklination, so gilt in erster Näherung

$$\begin{aligned} |\mathfrak{M}| &= \pm\left[f\,\frac{m\,M\,l}{(r - l\cos\delta)^2}\sin\delta - f\,\frac{m\,M\,l}{(r + l\cos\delta)^2}\sin\delta\right] \\ &= \pm f\,m\,M\,l\sin\delta\,\frac{4\,r\,l\cos\delta}{(r^2 - l^2\cos\delta)^2}, \end{aligned}$$

(das obere Vorzeichen gilt bei positiver, das untere bei negativer Deklination) und bei Vernachlässigung des zweiten Gliedes im Nenner

$$|\mathfrak{M}| = \pm 4\, f\, m\, M\, l^2 \frac{\sin\delta\cos\delta}{r^3} = \pm K \frac{M}{r^3} \sin\delta\cos\delta. \quad (K = 4\, f\, m\, l^2)$$

Aus Figur 2 lassen sich die Folgen des durch den Mond ausgeübten Drehmomentes

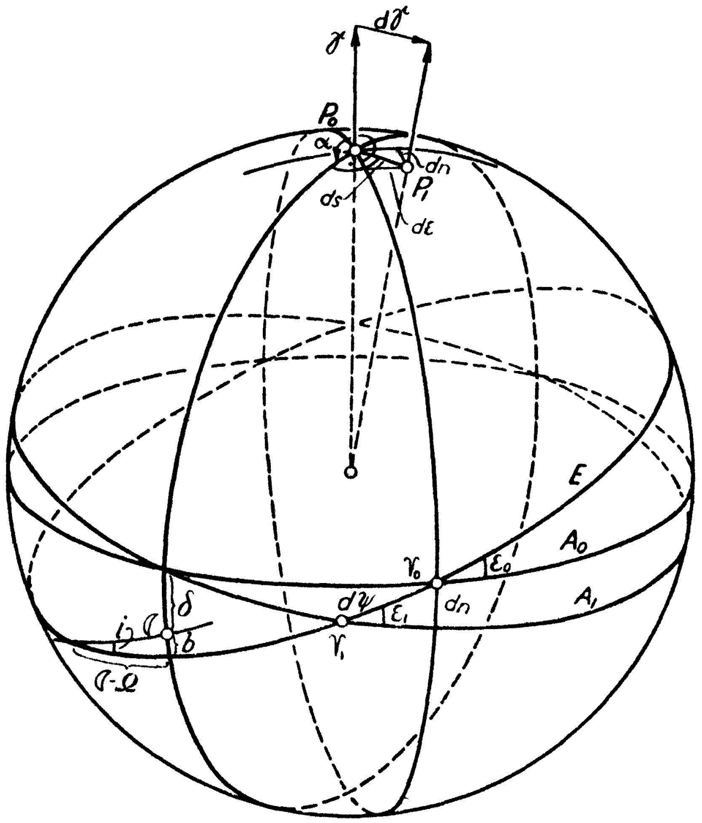

Fig. 2

leicht ablesen. Hierin bedeuten[1]:

$d\mathfrak{S} = \mathfrak{M}\,dt$ die Änderung des Schwungvektors in der Zeit dt, hervorgerufen durch die Stellung des Mondes bei ☾ mit den Ekliptikkoordinaten Mondlänge ☾ und Breite b und den Äquatorkoordinaten α und δ,

☊ und i die Knotenlänge und Neigung der Mondbahn,

ds die Projektion von $d\mathfrak{S}$ auf die Himmelskugel,

dn die Komponente von ds in Richtung des Frühlingspunktes Υ_0,

$d\varepsilon$ die auf dn senkrecht stehende Komponente von ds.

dn und $d\varepsilon$ stellen den Ort des neuen Pols P_1 in bezug auf den ursprünglichen Pol P_0 dar. Der Äquator hat sich entsprechend in der Zeit dt von A_0 nach A_1 bewegt, der Frühlingspunkt von Υ_0 nach Υ_1 um die Strecke $d\psi = \operatorname{cosec}\varepsilon\, dn$ auf der festen Ekliptik E. Schließlich ist $\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = d\varepsilon$. Es ist

$$ds = \frac{|d\mathfrak{S}|}{|\mathfrak{S}|} = \frac{|\mathfrak{M}|}{|\mathfrak{S}|}\,dt = \pm \frac{KM}{|\mathfrak{S}|\, r^3} \sin\delta\cos\delta\, dt = \pm 2\, P \sin\delta\cos\delta\, dt,$$

$$dn = \pm \sin\alpha\, ds = 2\, P \sin\delta\cos\delta\sin\alpha\, dt,$$

$$d\varepsilon = \mp \cos\alpha\, ds = -\, 2\, P \sin\delta\cos\delta\cos\alpha\, dt,$$

$$d\psi = \operatorname{cosec}\varepsilon\, dn = 2\, P \operatorname{cosec}\varepsilon \sin\delta\cos\delta\sin\alpha\, dt.$$

---

[1]) In Figur 2 ist ein deutsches S statt $\mathfrak{S}$, ferner für die Knotenlänge Ω statt ☊ gesetzt.

Die rechten Seiten werden mit Hilfe der Fundamentalformeln der sphärischen Trigonometrie umgeformt. Nach diesen ist:

$$\begin{aligned} \sin\delta &= \cos\varepsilon \sin b + \sin\varepsilon \cos b \sin l, \\ \cos\delta \cos\alpha &= \cos l \cos b, \\ -\cos\delta \sin\alpha &= \sin\varepsilon \sin b - \cos\varepsilon \cos b \sin l. \end{aligned}$$

Die Mondbreite kann höchstens gleich der Schiefe der Mondbahn $i = 5^\circ 08' 43''$ werden. Wir begehen keinen großen Fehler, wenn wir deshalb

$$\cos b \approx 1 \quad \text{und} \quad \sin b \approx \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} i \sin(☾ - ☊)$$

setzen. Vernachlässigen wir noch die Glieder zweiten Grades in $\operatorname{tg} i$, so erhalten wir nach einigen leichten Rechnungen

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\psi}{dt}\right|_{☾} &= P_{☾} \cos\varepsilon \{1 - \cos 2☾ + 2 \operatorname{cotg} 2\varepsilon \operatorname{tg} i\, [\cos ☊ - \cos(2☾ - ☊)]\}, \\ \left.\frac{d\varepsilon}{dt}\right|_{☾} &= -P_{☾} \sin\varepsilon \{\sin 2☾ - \operatorname{cotg}\varepsilon \operatorname{tg} i\, [\sin ☊ - \sin(2☾ - ☊)]\}. \end{aligned}$$

Setzen wir schließlich noch voraus, daß

$$☾ = \mu t + ☾_0, \qquad ☊ = \varkappa t + ☊_0 \qquad \text{und} \qquad ☉ = \sigma t + ☉_0,$$

das heißt, daß man für den Mond und die Erde Kreisbahnen annimmt und daß sich ☊ linear mit der Zeit ändert, so ergibt die Integration

$$\begin{aligned} \psi_{☾} &= P_{☾} \cos\varepsilon \left\{ t - \frac{1}{2\mu} \sin 2☾ + 2 \operatorname{cotg} 2\varepsilon \operatorname{tg} i \left[\frac{1}{\varkappa} \sin ☊ - \frac{1}{2\mu - \varkappa} \sin(2☾ - ☊) \right] \right\}, \\ \Delta\varepsilon_{☾} &= P_{☾} \sin\varepsilon \left\{ \frac{1}{2\mu} \cos 2☾ - \operatorname{cotg}\varepsilon \operatorname{tg} i \left[\frac{1}{\varkappa} \cos ☊ - \frac{1}{2\mu - \varkappa} \cos(2☾ - ☊) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Um die analogen Gleichungen für den Einfluß der Sonne zu erhalten, haben wir in obigen Gleichungen nur ☾ durch ☉ und μ durch σ zu ersetzen und alle Glieder mit $\operatorname{tg} i$ zu streichen, so daß die einfacheren Gleichungen folgen:

$$\begin{aligned} \psi_{☉} &= P_{☉} \cos\varepsilon \left[t - \frac{1}{2\sigma} \sin 2☉ \right], \\ \Delta\varepsilon_{☉} &= P_{☉} \sin\varepsilon \left[\frac{1}{2\sigma} \cos 2☉ \right]. \end{aligned}$$

Der Gesamteffekt ist die Summe der beiden Wirkungen von Mond und Sonne.

Zerlegen wir nun, wie erwähnt, diesen Gesamteffekt in einen säkularen und einen periodischen Teil. Der säkulare Teil von

$$\psi = \psi_{☾} + \psi_{☉}$$

lautet:

$$\psi_0 = \left(P_{☾} + P_{☉}\right) \cos\varepsilon \cdot t = P \cos\varepsilon \cdot t = 50''\!,3709\, t.$$

Das ist die sogenannte Lunisolarpräzession (im Gegensatz zur planetarischen Präzession, die durch den störenden Einfluß der Planeten auf die Erdbahnebene hervorgerufen wird und die die Lage der Ekliptik ändert und hier nicht näher betrachtet werden soll). P ist aus Beobachtungen zu $54''\!,9066$ pro Jahr bestimmt worden. Die

Lunisolarpräzession stellt ein gleichförmiges Zurückweichen des Frühlingspunktes auf der Ekliptik dar. Nach unsern Entwicklungen kann man leicht das Verhältnis ableiten:

$$\frac{P_☾}{P_⊙} = \frac{M_☾}{r_☾^3} : \frac{M_⊙}{r_⊙^3} = 2{,}164$$

und damit wird: $P_☾ = 37{,}''5534$ und $P_⊙ = 17{,}''3532$.

Der Einfluß des Mondes auf die Präzession ist somit rund zweimal größer als der der Sonne.

$\Delta\varepsilon$ enthält kein säkulares Glied, so daß die Schiefe der Ekliptik im Mittel erhalten bleibt. Mit den Werten für

$$\begin{aligned} \mu &= 83{,}995301 \text{ pro trop. Jahr (in Bogenmaß)} \\ \sigma &= 6{,}283185 \text{ pro trop. Jahr (in Bogenmaß)} \\ \varkappa &= -0{,}337565 \text{ pro trop. Jahr (in Bogenmaß)} \\ i &= 5^0 8' 43'' \ (1900) \\ ☊ &= 23^0 27' 8{,}''26 \ (1900) \end{aligned}$$

erhält man dann auch die periodischen Glieder oder die Nutation in Länge und in Schiefe zu

$$\begin{aligned} \Delta\psi = &- 1{,}''267 \sin 2 ⊙ - 0{,}''205 \sin 2 ☾ \\ &- 17{,}''197 \sin ☊ - 0{,}''034 \sin (2 ☾ - ☊), \\ \Delta\varepsilon = &\ \ 0{,}''550 \cos 2 ⊙ + 0{,}''089 \cos 2 ☾ \\ &+ 9{,}''190 \cos ☊ + 0{,}''018 \cos (2 ☾ - ☊). \end{aligned}$$

Die strengere Rechnung ergibt:

$$\begin{aligned} \psi = &\ 50{,}''3708\, t - 1{,}''272 \sin 2 ⊙ - 0{,}''204 \sin 2 ☾ - 17{,}''234 \sin ☊ \\ &- 0{,}''034 \sin (2 ☾ - ☊) + 0{,}''209 \sin 2 ☊ + 0{,}''126 \sin M_⊙ \\ &- 0{,}''050 \sin (2 ⊙ + M_⊙) + 0{,}''021 \sin (2 ⊙ - M_⊙) \\ &+ 0{,}''012 \sin (2 ⊙ - ☊) + 0{,}''068 \sin M_☾ - 0{,}''026 \sin (2 ☾ + M_☾) \\ &+ 0{,}''015 \sin (2 ☾ - 2 ⊙ - M_☾) + 0{,}''011 \sin (2 ☾ - M_☾) \\ &+ 0{,}''006 \sin (2 ☾ - 2 ⊙), \\ \Delta\varepsilon = &+ 0{,}''551 \cos 2 ⊙ + 0{,}''089 \cos 2 ☾ + 9{,}''210 \cos ☊ \\ &+ 0{,}''018 \cos (2 ☾ - ☊) - 0{,}''090 \cos 2 ☊ + 0{,}''022 \cos (2 ⊙ + M_⊙) \\ &- 0{,}''009 \cos (2 ⊙ - M_⊙) - 0{,}''007 \cos (2 ⊙ - ☊) \\ &+ 0{,}''011 \cos (2 ☾ + M_☾) - 0{,}''005 \cos (2 ☾ - M_☾) \end{aligned}$$

$M_☾$ und $M_⊙$ sind die mittleren Anomalien der Mond- und Erdbewegung, und die Glieder mit diesen Argumenten treten infolge der Exzentrizität von Mond- und Erdbahn auf, die wir vernachlässigt haben. Im übrigen bleiben aber die Unterschiede zwischen der genäherten und der genauen Rechnung in kleinen Grenzen. Es ist noch zu beachten, daß der Faktor 9,"210, die sogenannte Nutationskonstante, in der astronomischen Praxis empirisch bestimmt wird, während wir sie aus den angenommenen Werten für die Sonnen- und Mondmasse und aus der Präzessionskonstanten rechnerisch bestimmt haben. Das System der astronomischen Konstanten ist nicht in sich geschlossen und widerspruchsfrei. Mit der beobachteten Nutationskonstanten errechnet man einen andern Massenwert des Mondes, als er unsern

Rechnungen zugrunde gelegt wurde und wie er sich aus direkteren Beobachtungen ergibt.

Der eigentliche Zweck der vorliegenden Rechnungen war aber weniger das Gewinnen numerischer Resultate als das genäherte Darstellen der Erdachsenbewegung und das Erläutern der Begriffe Präzession und Nutation in der Astronomie.

M. SCHÜRER, Bern.

Über die Grundfunktionen positiver Zahlen

Für das System A der n positiven Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ bilden wir die symmetrischen Grundfunktionen

$$
\begin{aligned}
S_1(A) &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n &&= \binom{n}{1} m_1(A)\\
S_2(A) &= a_1 a_2 + a_1 a_3 + \cdots &&= \binom{n}{2} m_2^2(A)\\
S_3(A) &= a_1 a_2 a_3 = a_1 a_2 a + \cdots &&= \binom{n}{3} m_3^3(A)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
S_n(A) &= a_1 a_2 a_3 \ldots a_n &&= \binom{n}{n} m_n^n(A),
\end{aligned}
$$

wo m_1 das arithmetische, m_n das geometrische Mittel und $m_2^2, m_3^3, \ldots, m_{n-1}^{n-1}$ die Mittel aller Produkte von je zwei, drei, ..., $(n-1)$ Zahlen des Systems A bedeuten.

Die bekannte Tatsache, daß die Folge der absoluten Grundwerte $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ *monoton abnehmend,* das heißt, daß

$$m_1(A) \geqq m_2(A) \geqq \cdots \geqq m_n(A) \tag{1}$$

ist, soll in der vorliegenden Arbeit auf elementare Art bewiesen werden.

Für $n = 2$ geht die zu beweisende Behauptung

$$m_1 \geqq m_2$$

oder

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geqq \sqrt[2]{a_1 a_2}$$

unmittelbar aus der selbstverständlichen Ungleichung

$$(a_1 - a_2)^2 \geqq 0$$

hervor.

Angenommen, die Beziehungen (1) gelten für jedes beliebige System A von n positiven Zahlen, so soll gezeigt werden, daß sie ebenfalls für jedes beliebige System B von $n + 1$ positiven Zahlen gelten.

Es bedeute B das System von $n + 1$ positiven beliebigen Zahlen

$$b_1 \geqq b_2 \geqq b_3 \geqq \cdots \geqq b_{n+1} > 0$$

und

B_1 das Teilsystem der n Zahlen $b_2, b_3, \ldots, b_{n+1}$ (B ohne b_1)

B_2 das Teilsystem der n Zahlen $b_1, b_3, \ldots, b_{n+1}$ (B ohne b_2)

....

B_{n+1} das Teilsystem der n Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ (B ohne b_{n+1}).