Soit un polynôme
$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n .$$

Construisons le vecteur $M_0 M_1$ de longueur a_0, parallèle au côté 0 du carré, avec conservation ou changement de sens suivant que a_0 est positif ou négatif. Par l'extrémité M_1 de $M_0 M_1$, menons le vecteur $M_1 M_2$, construit de la même façon que le précédent, mais relativement au coefficient a_1 et au côté 1 du carré. Continuons de même jusqu'à $M_n M_{n+1}$ relatif à a_n. On obtient une ligne polygonale rectangulaire $M_0 M_1 M_2 \ldots M_{n+1}$.

Pour voir si z est racine de $f(x)$, menons par M_0 une droite de coefficient angulaire z; elle coupe le support de $M_1 M_2$ en un point Z_1, tel que $M_1 Z_1 = a_0 z$; on a $M_2 Z_1 = a_0 z + a_1$. Par Z_1, menons la perpendiculaire à $M_0 Z_1$; elle coupe le support de $M_2 M_3$ en Z_2 et on a $M_3 Z_2 = a_0 z^2 + a_1 z + a_2$. Continuons de même. On obtient finalement un segment $M_{n+1} Z_n = f(z)$. La ligne polygonale rectangulaire $M_0 Z_1 Z_2 \ldots Z_n$ est appelée l'*orthogone* relatif à $f(x)$ et à z. Si M_{n+1} et Z_n sont confondus, l'orthogone est fermé et $f(z) = 0$.

En principe, l'orthogone est réalisable matériellement par une règle (ou un bord d'équerre rectangle) placée suivant $M_0 Z_1$ et $n-1$ équerres rectangles ayant leurs sommets en $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-1}$. Pratiquement, cela est malcommode et on opère avec un transparent quadrillé.

La solution d'une équation irréductible de degré n n'exige pas nécessairement $n-1$ équerres; par exemple, par des opérations rationnelles et des racines carrées, on ramène l'équation de degré 4 à une équation cubique.

Dans ce qui précède, l'orthogonalité des axes n'est pas essentielle ainsi qu'on le voit en exprimant projectivement les relations entre les axes et les côtés de l'orthogone; des relations d'harmonicité s'introduisent ainsi à la place de celles d'orthogonalité.

8. La théorie précédente possède un parallèlisme remarquable avec celle de certains corps de nombres, ainsi que le montre le tableau ci-dessous.

Opérations de l'équerre	*Corps correspondants*
Ordinaires	Nombres rationnels
Ordinaires et glissement limité	Nombres rationnels et racine carrée de la somme de deux carrés
Ordinaires, glissement limité et inscription	Nombres rationnels et racine carrée de la somme et la différence de deux carrés
Equerres en nombre quelconque	Nombres algébriques

La transcendance de π montre enfin l'impossibilité de la quadrature du cercle au moyen d'un nombre quelconque d'équerres.

Paul Rossier, Genève.

Sulle cubiche razionali

I teoremi sull'involuzione I_3^2 in un campo binario da me recentemente stabiliti[1]) si prestano immediatamente a svariate applicazioni particolarizzando il sostegno (razionale) della I_3^2 stessa. Così, ad esempio, supponendo tale sostegno una cubica

[1]) Vedasi: A. Longhi, *Sulle involuzioni cubiche di 2ª specie*, Elemente der Mathematik, Bd. II, Nr. 2, 1947. Tale lavoro verrà in seguito citato con la semplice indicazione «I_3^2».

sghemba, ovvero piana con punto doppio, si ottengono per queste curve alcune proprietà interessanti e, per quanto mi consta, nuove, che espongo nel presente articolo.

1. Sia Φ una cubica piana avente un nodo N: da chiamarsi più precisamente N_1 o N_2, con la rispettiva tangente ν_1 o ν_2, secondo che si consideri appartenente all'uno o all'altro dei due rami di cui è origine. Siano poi T_1, T_2, T_3 i flessi di Φ, con le relative tangenti τ_1, τ_2, τ_3, e τ la retta che li contiene.

Le ∞^2 rette del piano di Φ segano su Φ una involuzione I_3^2, della quale sono T_i $(i = 1, 2, 3)$ i punti tripli ed è (N_1, N_2) la coppia neutra («I_3^2», n⁰ 1).

Il punto P' *tangenziale* di un generico punto P di Φ, cioè l'ulteriore intersezione della cubica Φ con la tangente a Φ in P, è il *coniugato* di P in I_3^2; mentre i punti di contatto P_1 e P_2 delle due ulteriori tangenti da P a Φ sono i punti *anticoniugati* di P nell'involuzione I_3^2(«I_3^2», n⁰ 4).

2. Il teorema II di «I_3^2» fornisce allora senz'altro il seguente:

a) *Esistono sulla cubica* Φ (*all'infuori dei flessi*) *tre punti* E_1, E_2, E_3 *caratterizzati dalla proprietà che il punto tangenziale* (n⁰ 1) *di* E_k, *e i punti di contatto delle due rette per* E_k *tangenti altrove a* Φ, *risultano* (*distinti e*) *appartenenti ad una retta* γ_k $(k = 1, 2, 3)$: *che si dirà* annessa *ad* E_k.

I punti E_1, E_2, E_3 (*sempre non allineati*) *sono rispettivamente i coniugati dei flessi* T_1, T_2, T_3 *nella involuzione binaria, su* Φ, *avente per punti doppi* N_1 *ed* N_2 (n⁰ 1): *onde* E_k *è l'ulteriore intersezione con* Φ (*dopo* N_1 *e* N_2) *della retta coniugata armonica di* NT_k *rispetto alle due tangenti nel nodo* N *di* Φ.

Si può aggiungere («I_3^2», Teor. III) che:

b) *Il punto* E_k *è il punto di contatto dell'unica tangente di* Φ *passante per il flesso* T_k *e distinta dalla tangente d'inflessione* τ_k *in* T_k $(k = 1, 2, 3)$: *così che i tangenziali di* E_1, E_2, E_3 *sono i flessi* T_1, T_2, T_3.

Ma allora, per note proprietà delle cubiche piane[1]), esiste una conica (irriducibile) avente in E_k un contatto di 5⁰ ordine con Φ. Cioè:

c) *I punti* E_1, E_2, E_3 *sono i tre punti sestatici della cubica* Φ.

Invece dal teorema IV di «I_3^2» si desume che:

d) *La retta* E_rE_s *congiungente due qualunque dei punti* E_1, E_2, E_3 *e la retta* γ_k *annessa al terzo* E_k *passano entrambe per il flesso* T_k.

In base al n⁰ 6 di «I_3^2» si ha poi che [2]):

e) *Il punto* E_k *è l'ulteriore intersezione* (*dopo* N_1 *e* N_2) *della cubica* Φ *con la retta passante per* N *e per il punto d'incontro delle tangenti* τ_r, τ_s *a* Φ *nei flessi* T_r, T_s *diversi dal tangenziale* T_k *di* E_k.

Per il teorema V di «I_3^2», le rette γ_r e γ_s segano Φ in due terne di punti appartenenti ad una stessa involuzione g_3^1 insieme con la terna costituita dal punto E_k e dalla coppia neutra (N_1, N_2): ne consegue che le rette γ_r, γ_s, NE_k sono concorrenti; ossia che i punti E_k e $(\gamma_r \gamma_s)$ sono allineati con N. D'altra parte, come risulta da d), la retta E_rE_s e la γ_k concorrono su τ (in T_k). Ne deriva che il triangolo $E_1E_2E_3$ e il trilatero $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ si corrispondono in una omologia di centro N e asse τ.

---

[1]) Cfr. ad es.: L. CREMONA, *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, Memorie dell'Accademia delle Scienze di Bologna, Serie I, Tomo 12, n⁰ 39 (d); oppure: *Opere*, Vol. I, p. 356.

[2]) Come si riconosce pure direttamente osservando che la retta NE_k è la *polare armonica* del flesso T_k, cioè costituisce con la tangente d'inflessione τ_k la conica polare di T_k rispetto alla cubica Φ.

Se X è l'ulteriore intersezione della retta $E_r E_s$ con la cubica Φ, il tangenziale X' di X dev'essere[1]) allineato coi tangenziali di E_r e di E_s, cioè, per la proposizione a), coi flessi T_r e T_s: dunque X' coincide col terzo flesso T_k; e allora X o è il punto E_k (avente per tangenziale T_k) o è il flesso T_k medesimo (avente per tangenziale sè stesso). Il primo caso non può darsi perchè i punti E_r, E_s, E_k non sono allineati; dunque $X \equiv T_k$: e le rette $E_r E_s$, τ_k si intersecano sulla retta τ (in T_k). Ne consegue che il triangolo $E_1 E_2 E_3$ e il trilatero $\tau_1 \tau_2 \tau_3$ si corrispondono in una omologia di asse τ: e di centro N, come si desume da d).

Tenendo ora presente che il prodotto di due omologie di centro N ed asse τ è pure un' omologia con lo stesso centro e asse, si conclude col teorema:

f) *Il triangolo di vertici E_1, E_2, E_3; il triangolo di lati γ_1, γ_2, γ_3; e quello di lati τ_1, τ_2, τ_3 sono a due a due omologici: rispetto al centro N e all'asse τ.*

Infine il teorema VI di «I_3^2», congiunto a note proprietà delle forme binarie cubiche, porge la proposizione seguente:

g) *Nel fascio (N) si considerino le rette ν_1, ν_2, NE_k e le ν'_1, ν'_2, NT_k ordinatamente coniugate armoniche di ciascuna di esse rispetto alle altre due* [cfr. a)]. *Essendo allora T_r e T_s i due flessi diversi da T_k, le ulteriori intersezioni di ν'_1 e ν'_2 con la cubica Φ sono i due punti di Φ allineati con T_k e col punto d'incontro $(\tau_r \tau_s)$ delle tangenti in T_r e T_s. Inoltre le coppie di rette: ν_1 e ν'_1, ν_2 e ν'_2, NE_k ed NT_k appartengono tutte all'involuzione, nel fascio (N), di raggi doppi NT_r ed NT_s.*

3. Ad altri risultati si perviene considerando l'involuzione I_3^2 staccata sulla cubica Φ da tutte le coniche per tre suoi punti. Si trova così ad esempio la proposizione:

Per tre punti prefissati A, B, C della cubica Φ (n° 1), *anche non distinti purchè diversi dal nodo N, si possono condurre tre coniche Ω_i osculatrici altrove a Φ: i loro punti di contatto O_i $(i = 1, 2, 3)$ giacciono sopra una conica con A, B, C.*

Pei quattro punti A, B, C, O_k passa una sola conica tangente a Φ in un quinto punto P_k: i punti P_1, P_2, P_3 (mai situati sopra una conica con A, B, C) sono rispettivamente i coniugati di O_1, O_2, O_3 nella involuzione binaria, su Φ, avente per punti doppi N_1 ed N_2 (n° 1).

Sia r, s, k una permutazione qualunque di 1, 2, 3. *Allora*:

I sei punti A, B, C, O_k, P_r, P_s appartengono ad una conica.

Per A, B, C, P_k passano due coniche tangenti altrove a Φ: i loro punti di contatto stanno con A, B, C, O_k su una conica Π_k.

La conica passante per i punti A, B, C, N, P_k appartiene sia al fascio individuato da Ω_r ed Ω_s che a quello individuato da Π_r e Π_s.

4. Facendo coincidere due dei tre punti A, B, C coi punti ciclici del piano di Φ, dal n° 3 si deduce:

Se una cubica Φ', dotata di un nodo N', passa (semplicemente) per i punti ciclici del suo piano, da un suo punto A', genericamente prefissato, escono tre cerchi Ω'_i osculatori altrove a Φ': i loro punti di contatto $O'_i (i = 1, 2, 3)$ stanno con A' sopra un medesimo cerchio.

Essendo P' un punto variabile di Φ', si considerino: l'ulteriore intersezione Q' di Φ' col cerchio per A' tangente a Φ' in P', e i punti di contatto Q'_1, Q'_2 dei due cerchi passanti per A', P' e tangenti altrove a Φ'.

---

[1]) Cfr. ad es.: L. CREMONA, Memoria citata, n° 39 (b); oppure: *Opere*, Vol. I, p. 355.

Esistono allora su Φ' tre posizioni di P', siano P'_i $(i = 1, 2, 3)$, tali che i suddetti punti Q', Q'_1, Q'_2 relativi a ciascuna risultano (distinti e) situati con A' sopra un cerchio Π'_i.

Il punto P'_i è il punto di contatto dell'unico cerchio per A' e O'_i tangente altrove a Φ'.

Per qualunque permutazione k, r, s degli indici 1, 2, 3 si ha che i punti A', O'_k, P'_r, P'_s sono conciclici; e il cerchio circoscritto al triangolo $A'N'P'_k$ appartiene sia al fascio individuato da Ω'_r ed Ω'_s che a quello individuato da Π'_r e Π'_s.

5. Supponendo invece l'involuzione I^2_3 segata sopra una cubica gobba dai piani di una stella si ottiene, fra altro, il teorema:

Siano: Γ una cubica sghemba; O un punto generico fuori di essa; S_1 ed S_2 i punti di appoggio della bisecante di Γ uscente da O; ω_1, ω_2, ω_3 i piani per O osculatori a Γ; e O_k il punto di contatto di ω_k $(k = 1, 2, 3)$. Allora:

1) *Su Γ esistono tre punti M_1, M_2, M_3, non complanari con O, tali che l'ulteriore intersezione di Γ col piano per O tangente a Γ in M_k e i punti di contatto delle due ulteriori tangenti a Γ, dopo quella in M_k, incidenti alla retta OM_k giacciono con O in un piano μ_k $(k = 1, 2, 3)$.*

2) *I punti M_1, M_2, M_3 sono ordinatamente i coniugati armonici, su Γ, dei punti O_1, O_2, O_3 rispetto ai punti S_1 ed S_2.*

3) *Il punto M_k è quello di contatto dell'unica tangente di Γ incontrante la retta OO_k altrove che in O_k.*

4) *Essendo k, r, s una permutazione qualsiasi degli indici 1, 2, 3, i punti O_k, M_r, M_s sono complanari con O. Inoltre: il piano dei punti S_1, S_2, M_k; quello dei coniugati armonici, su Γ, di ciascuno di essi rispetto agli altri due; e i piani ω_r ed ω_s osculatori a Γ in O_r ed O_s passano per una stessa retta formando un gruppo armonico.*

5) *Il triedro di spigoli OM_1, OM_2, OM_3 corrisponde in una polarità nella stella di centro O al triedro di faccie μ_1, μ_2, μ_3; come pure (in un'altra polarità) a quello di faccie ω_1, ω_2, ω_3.*

AMBROGIO LONGHI, Lugano.

Die Präzession und Nutation der Erde

In den Physiklehrbüchern wird die Präzessionsbewegung der Erde meist nur ganz kurz im Zusammenhang mit der Theorie des Kreisels erwähnt. Dabei wird sie in vielen Fällen, wenn nicht gerade falsch, so doch mindestens unklar dargestellt. Dies rührt wohl daher, daß die Theorie ziemlich verwickelt und zudem der Begriff der Nutation in der Physik ein etwas anderer als in der Astronomie ist, so daß sich leicht Verwechslungen einstellen. Im allgemeinen findet man die Darstellung, daß sich der Präzessionsbewegung der Erde sogenannte Nutationen *überlagern*, die dem Mondknotenumlauf zuzuschreiben sind und deshalb eine $18^2/_3$jährige Periode besitzen. Die Zerlegung der Erdachsenbewegung in Präzession und Nutation ist jedoch rein formaler Natur und hat keinen physikalischen Grund. Die Präzession der Erde ist eine ungleichförmige, die durch einen säkularen Anteil (Potenzreihe nach der Zeit) und einen periodischen Anteil (Fourier-Reihe mit den Argumenten Sonnen- und Mondlänge, Mondknoten usw.) dargestellt werden kann. Den säkularen Anteil nennt man in der Astronomie die Präzession, den periodischen die Nutation.