obtenus au moyen de deux termes; $7 = 4 + 1 + 2$; $9 = 4 + 4 + 1$; $12 = 6 + 4 + 2$ exigent trois termes; $11 = 4 + 4 + 1 + 2$; $14 = 6 + 4 + 2 + 2$; $13 = 4 + 4 + 1 + 2 + 2$ et $15 = 6 + 4 + 2 + 2 + 1$ en exigent quatre ou cinq; la suite comporte sept termes.

Ce problème a une application pratique: construire un secondaire de transformateur donnant entre deux bornes une tension multiple entier d'une tension unité, sans qu'aucune autre connexion soit établie. P. Rossier.

(Dem Aufgabensteller ist keine allgemeine Lösung bekannt.)

38. a) Im Jahre 0 leben tausend Individuen, welche die nullte Generation bilden. Nach einem Jahre sterben sie ab und hinterlassen Nachkommen, die erste Generation usw. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Individuum k (0, 1, 2, ..., 20) «Kinder» hat, sei p_k, so daß also gilt $p_0 + p_1 + \cdots + p_{20} = 1$. Ferner sei die Erwartung $0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2\,p_2 + \cdots + 20\,p_{20} = 1$. Wir setzen die Wahrscheinlichkeit, daß ein Individuum nach n Jahren keine Nachkommen mehr hat, gleich $x(n)$. Diese Folge (für $n = 1, 2, \ldots$) ist nirgends abnehmend und $\leqq 1$. Sie besitzt also eine Grenze x. Die Aufgabe besteht in der Berechnung und Deutung dieses x.

b) Im Jahre 0 sollen alle Individuen verschiedene Familiennamen haben, die sich vererben. In der 1000. Generation sei die Anzahl der Individuen 2000. Was läßt sich über die Anzahl der noch existierenden Familiennamen aussagen? A. Speiser.

Prüfungs- und Übungsaufgaben

Die Publikation der folgenden Aufgaben (meist mit Lösungen) möchte zur Orientierung und Anregung dienen. Auf Originalität wird von den Aufgabenstellern kein Anspruch erhoben.

Freie kantonale Maturität, Basel, Herbst 1947 (Typen A, B und Handel)

1. Addiert man zu den 3 Gliedern einer geometrischen Folge bzw. 7, 18 und 2, so erhält man eine arithmetische Folge. Das erste Glied der geometrischen Folge ist 3, das zweite Glied ist negativ. Wie lauten die 3 Glieder der beiden Folgen?

2. Die Kanten zweier Kupferwürfel sind um 5 cm und ihre Gewichte um 42,7 kg verschieden. Berechne die Summe ihrer Gewichte. Dichte des Kupfers 8,93 g cm^{-3}.

3. Bestimme die Länge der Linien $x^2 + y^2 - 4x = 0$ und $x^2 + y^2 + 10x - 6y = 0$ sowie die Koordinaten ihrer Schnittpunkte. Unter welchem Winkel schneiden sie sich im Schnittpunkt, der vom Nullpunkt am weitesten entfernt ist?

4. Auf einem quadratischen Papierblatt von der Seitenlänge a sind vier gleichschenklige kongruente Dreiecke gezeichnet, die die Quadratfläche nicht vollständig bedecken; jedes hat eine Seite des Quadrates als Grundlinie. Schneidet man die 4 Dreiecke weg, so bleibt ein sternförmiges Stück Papier übrig, das man zu einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche zusammenfalten kann. Berechne das Volumen und die Oberfläche der Pyramide, wenn ihre Grundfläche die Seitenlänge b hat.

5. Im Dreieck ABC ist $AB = 23$ cm, $AC = 21$ cm, Winkel $BAC = 107^0\,24'$. Ein Kreis berührt die Seite AB in B und geht durch C. Berechne den Radius dieses Kreises und die Länge des Bogens BC.

6. Im rechtwinkligen Dreieck ABC ist der Winkel in A $26^0\,37'$. Es sei M die Mitte der Hypotenuse AB und H der Fußpunkt der Höhe auf die Hypotenuse. Die Fläche des Teildreieckes CMH ist 140 cm^2. Berechne die Seiten dieses Teildreieckes.

Für 5 gut gelöste Aufgaben ist die Note 6 gegeben worden. R. Jungen.

Aufgabe aus der Hydrodynamik

Ein Behälter mit vertikaler Seitenwand (y-Achse) sei mit einer reibungslosen Flüssigkeit gefüllt. Die Niveauhöhe h_0 werde konstant gehalten. Bohrt man in verschiedenen Höhenlagen S der Seitenwand Ausflußöffnungen, so treten aus ihnen Flüssigkeitsstrahlen, die Flugparabeln verschiedener Reichweite W durchlaufen. Die Scheitelpunkte derselben liegen in den Ausflußöffnungen. Man lege eine x-Achse in der Höhenlage des Behälterbodens und weise folgende Tatbestände nach:

1. Die maximale Wurfweite auf der x-Achse tritt auf für eine Öffnung in halber Höhe $(h_0/2)$.
2. Alle Parabeln haben dieselbe Leitlinie. Sie fällt in die Niveauhöhe des Flüssigkeitsspiegels (h_0).
3. Zeichnet man eine Ellipse, deren Mittelpunkt sich auf der Seitenwand in halber Höhe befindet, deren große Halbachse $a = h_0$ und deren kleine Halbachse $b = {}^1/_2\, h_0$ ist, so liefert jeder Ellipsenpunkt durch seine Abszisse die Wurfweite zu einer Austrittsöffnung, die in der Ordinatenhöhe des Punktes liegt.
4. Die Enveloppe aller Strahlparabeln ist die eine Diagonale des halben Hauptachsenrechtecks.

P. FRAUENFELDER.

Prüfung in Mathematik

(*Technikum Winterthur*, Fachschule für Maschinenbau, 1946)

1. Die *Funktion*

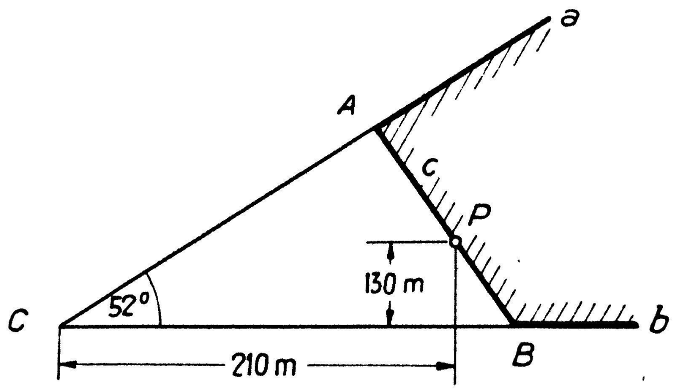
$$y = \frac{x}{\sqrt{36 - x^2}}$$

ist graphisch darzustellen und diejenige Fläche zu berechnen, die von der Funktionskurve sowie den Geraden $x = 0$ und $x = 5{,}5$ eingeschlossen wird. $[F = 7{,}204.]$

2. Der Durchmesser einer Kugel mißt $d = 5{,}22$ cm. Der maximale Fehler dieser Maßangabe beträgt 0,005 cm. Wie groß sind die maximalen ***absoluten und relativen Fehler*** der aus d berechneten Oberfläche und des Volumens der Kugel?

$$\left[\Delta O = 0{,}164\ \text{cm}^2;\ \Delta V = 0{,}214\ \text{cm}^3;\ \frac{\Delta O}{O} = 0{,}00192 \approx 2^0/_{00};\ \frac{\Delta V}{V} = 0{,}00288 \approx 3^0/_{00}.\right]$$

3. Zwei geradlinige Dämme a und b würden sich unter einem Winkel von 52^0 schneiden. Aus Sicherheitsgründen will man einen so spitzen Winkel vermeiden und baut deshalb



einen Querdamm c, der a und b verbindet und durch eine der Lage nach gegebene Anhöhe P geht. Wie weit sind A und B (s. Figur) von C entfernt, wenn die preiszugebende Fläche ABC ein *Minimum* werden soll?
$[BC = 217$ m; $AC = 330$ m; c ist Hyperbeltangente.$]$

4. Wie groß sind die *Trägheitsmomente* J_x und J_y der zwischen

$$x^2 + y^2 - 16 = 0 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$$

eingeschlossenen Fläche? $\left[J_x = \frac{239}{4}\pi;\ J_y = \frac{255}{4}\pi.\right]$

5. Ein *Sechseck ABCDEF* ist durch seine Eckpunkte $A(2|1)$, $B(0|3)$, $C(-2|0)$, $D(-2|-2)$, $E(0|-2)$, $F(2|-1)$ gegeben.

a) Berechne seinen *Inhalt*. $[F = 14.]$

b) Übe auf seine Eckpunkte die *Transformation*

$$x' = 4x - 3y, \qquad y' = -x + 2y$$

aus und beweise, daß das Sechseck $A'B'C'D'E'F'$ dem ursprünglichen Sechseck $ABCDEF$ perspektiv affin ist.

c) Welche Richtung haben die *Affinitätsstrahlen*? [$m = -1/3$.]

d) Wie heißt die Gleichung der *Affinitätsachse*? [$y = x$.]

e) Welchen Wert hat das *Affinitätsverhältnis*? [$k = 5$.]

f) Wie groß ist die *Fläche* des Sechsecks $A'B'C'D'E'F'$? [$F' = 70$.]

6. Ein Zirkel bewegt sich in der Ebene seiner Schenkel derart, daß die eine Spitze fest bleibt, während die andere auf einer festen Gerade gleitet.

Welche *Bahn* beschreibt

a) ein beliebiger Punkt des gleitenden Schenkels,

b) ein beliebiger Punkt auf der rückwärtigen Verlängerung des gleitenden Schenkels,

c) derjenige Punkt, den man erhält, wenn man den gleitenden Schenkel nach rückwärts um sich selbst verlängert?

Gibt es eine technische Anwendung des Falls c)?

[a) und b): Ellipse; c) Gerade.] W. H.

Prüfung in Mechanik

(*Technikum Winterthur*, Fachschule für Maschinenbau, 1946)

1. Eine rechteckige Platte ist in A drehbar gelagert und wird in B durch einen Zylinder gestützt.

Wie groß müssen in B und C die Reibungswinkel ϱ_B und ϱ_C mindestens sein, damit der Zylinder nicht wegrollt?

Wie groß sind die Stützkraft A und die aus der Reibung und der Normalkraft resultierenden Stützkräfte B und C? $r = 1$ m, $l = 6$ m, $b = 1$ m. Gewicht der Platte $G_1 = 500$ kg, Gewicht des Zylinders $G_2 = 200$ kg. Rollende Reibung vernachlässigen. (Graphische Lösung.)

[$\varrho_B = 13^0\,13'$; $\varrho_C = 8^0\,2'$; $A = 220$ kg; $B = 300$ kg; $C = 495$ kg.]

2. Beim Kurbelmechanismus nach Figur ist die Geschwindigkeit des vertikal geführten Punktes A $v_1 = +5$ m/sec und die Beschleunigung $b_1 = -35$ m/sec². $r = 20$ cm, $l = 50$ cm.

Wie groß sind momentan die Geschwindigkeit v_2 und die Beschleunigung b_2 des Kurbelzapfens B?

(Graphische Lösung durch Zerlegen der Schubstangenbewegung in eine translatorische (Bewegung von A) und eine drehende (Bewegung um A).)

[$v_2 = 4{,}30$ m/sec; $b_2 = 100$ m/sec².]

3. Am oberen Ende einer Feder ist das Gewicht $G = 20$ kg befestigt und durch zwei Gleitflächen vertikal geführt. Das untere Ende der Feder wird plötzlich mittels eines Hebels um $h = 3$ cm angehoben und dort festgehalten. Das Gewicht G gerät in Schwingung. Federkonstante $k = 4$ kg/cm.

Wie groß ist die Frequenz f dieser Schwingung?

Wie groß werden die Amplitude a und die maximale Geschwindigkeit v der Schwingung?

[Es entsteht eine harmonische Schwingung. $f = 2{,}251$/sec; $a = 3$ cm; $v = 0{,}425$ m/sec.]

4. Ein Kolbenkompressor wird mittelst einer Riemenscheibe angetrieben. In der gezeichneten Lage ist die Kolbenkraft $Q = 400$ kg. $l = 50$ cm, $r = 10$ cm. Zugkraft im gezogenen Trum $t = 200$ kg.

a) Genügt t, um die notwendige Riemenreibung zu erzeugen? Riemenreibungskoeffizient $\mu = 0{,}25$.

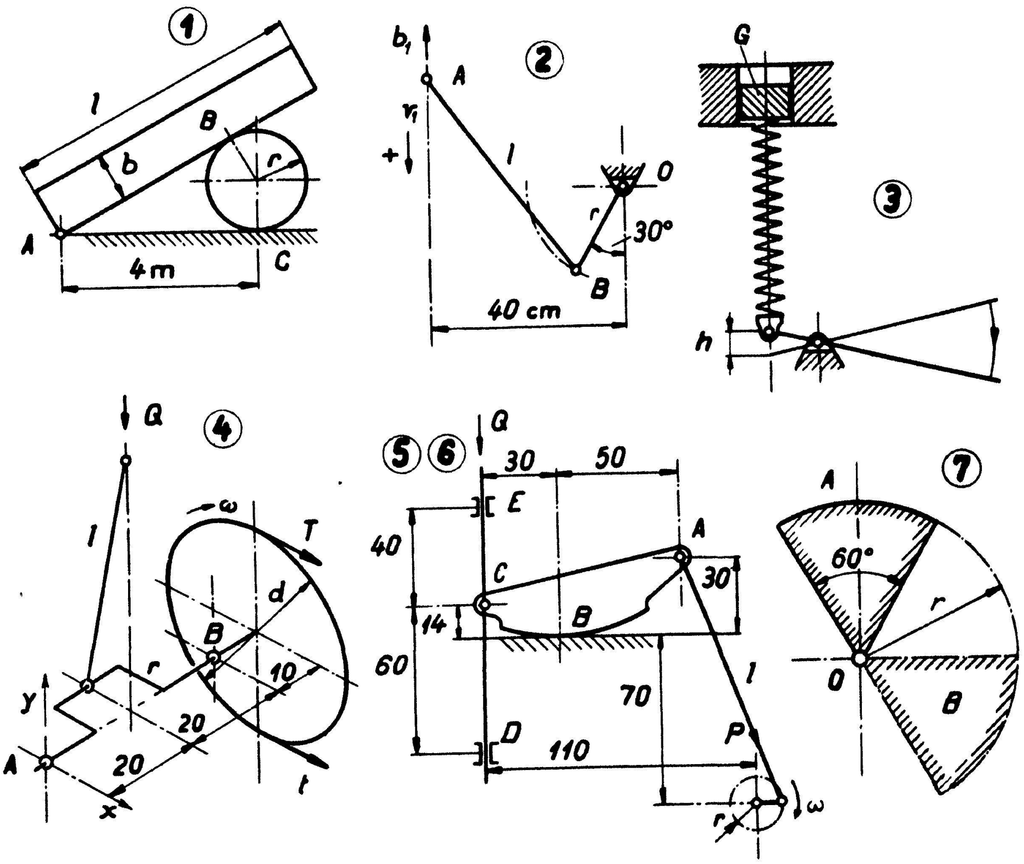
b) Wie groß sind die vertikalen und horizontalen Lagerstützkräfte A_y, B_y und A_x, B_x? [t genügt, weil der notwendige Reibungskoeffizient $\mu' = 0{,}187$ kleiner ist als das gegebene μ. $A_x = +180{,}6$ kg; $B_x = -659{,}4$ kg; $A_y = +200$ kg; $B_y = +200$ kg.]

5. Gegeben: Wälzhebelantrieb einer Ventilspindel in der gezeichneten Lage. Ventilbelastung $Q = 60$ kg. Maße der Figur sind in Zentimeter gegeben. Reibungskoeffizient in B, D und E ist $\mu = 0{,}20$.

Wie groß sind die Schubstangenkraft P und die beiden Spindelführungskräfte D und E? (Graphische Lösung.)

[$P = 44{,}5$ kg, resultierende Stützkräfte aus Normaldruck und Reibung: $D = 16{,}0$ kg; $E = 23{,}1$ kg.]

6. Wie groß ist die momentane Hubgeschwindigkeit v der Spindel, wenn die Exzenterwelle sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 30$ 1/sec dreht? $r = 10$ cm. (Bestimmung von v mit den Momentanzentren der Schubstangen und der Wälzhebelbewegung.) [$v = 1{,}59$ m/sec.]



7. Eine kreissektorförmige Platte dreht sich unter dem Einflusse ihres Gewichtes $G = 300$ kg aus ihrer vertikalen Ruhelage A um die Achse O.

Wie groß und wie gerichtet ist in der Lage B die Stützkraft Z in O? Sektorradius $r = 188{,}5$ cm.

(Bestimmung der Winkelbeschleunigung und der Winkelgeschwindigkeit in der Lage B nach Newton und mit dem Energiesatz, Bestimmung von Z mit dem dynamischen Gleichgewicht.) [$Z = 886$ kg.]

8. Durch zwei Auslaufversuche soll das Massenträgheitsmoment J eines Schwungrades bestimmt werden.

Versuch 1: Anfangsgeschwindigkeit $\omega_1 = 25$ 1/sec, Bremszeit $T_1 = 71{,}5$ sec, Bremsmoment $M_1 = 50$ mkg.

Versuch 2: Anfangsgeschwindigkeit $\omega_2 = 20$ 1/sec, Bremszeit $T_2 = 80{,}0$ sec, Bremsmoment $M_2 = 30$ mkg.

M_1 und M_2 bleiben während des Bremsens konstant. Zapfenreibungsmoment M_0 ist unbekannt, darf aber nicht vernachlässigt werden.

Wie groß ist J des Schwungrades?

Wie groß ist das Zapfenreibungsmoment M_0?
(Bestimmung von J und M_0 mit Satz vom Antrieb.)
[$J = 200$ kgsec^2 m, $M_0 = 20$ mkg.] *R. S.*

Literaturüberschau

A. OSTROWSKI: *Vorlesungen über Infinitesimalrechnung*

Zum Gebrauch bei akademischen Vorträgen sowie zum Selbststudium
Erster Band: Funktionen einer Variablen. Brosch. Fr. 43.50, geb. Fr. 47.50
Verlag Birkhäuser, Basel 1945

Der vorliegende erste Band bringt in hervorragender satztechnischer Ausgestaltung die vom Verfasser jeweils im ersten Semester gehaltene Vorlesung über Infinitesimalrechnung. Das erste Kapitel gibt eine Orientierung über das Wesen der Mathematik, über die Grundeigenschaften der reellen Zahlen und den Funktionsbegriff. Das zweite Kapitel enthält auf 40 Seiten eine außerordentlich ausführliche, sehr sorgfältige Auseinandersetzung über den Grenzwertbegriff. Im dritten Kapitel werden in der Hauptsache der Begriff des bestimmten Integrals und dessen elementare Eigenschaften entwickelt. Ferner werden hier die trigonometrischen Funktionen eingeführt. Das vierte Kapitel bringt den Begriff der Ableitung und die Fundamentalsätze der Infinitesimalrechnung. Die eigentliche Technik des Differenzierens und Integrierens wird im fünften und sechsten Kapitel erläutert. Im letzteren kommen auch die Logarithmus- und Exponentialfunktion sowie deren wichtigste Eigenschaften zur Behandlung. Im siebenten Kapitel finden sich Anwendungen der ersten und der höheren Ableitungen auf die Beurteilung des Funktionsverlaufes (allerdings ohne Einführung der Krümmung), die Taylorsche Formel und die Reihenentwicklungen der elementaren Funktionen.

Bei den vielen, wenn auch heute schwer erhältlichen Lehrbüchern über Infinitesimalrechnung fragt man sich bei einer Neuerscheinung vor allem, ob in Aufbau und Durchführung etwas Neues geboten wird. Bei dem Werke von OSTROSWKI freut man sich über die ausgeprägte Eigenartigkeit. Einige besondere Vorzüge seien hier erwähnt: Die vielen interessanten Zwischenbemerkungen, historischen Angaben und Fußnoten machen die Darstellung lebendig. Von den Mathematiklehrern besonders geschätzt sind die Strenge der Formulierungen und der lückenlose Aufbau aus den Axiomen für die reellen Zahlen. Für die Klärung der Grundbegriffe und zur Übung des mathematischen Denkens überhaupt dient ein selten reichhaltiges Material an Übungen (ohne Lösungen). Der Verfasser hat hier eine Fundgrube interessanter Beispiele geschaffen, wofür wir ihm dankbar sind. Einzelne Beweisführungen sind virtuos durchgedacht. Es sei hier etwa auf die außerordentlich prägnante, vollkommen durchsichtige und wohl kaum weiter zu vereinfachende Darstellung des Riemannschen Integralbegriffes im § 12 (47, 48) verwiesen.

Der erste Band bringt zwar keine große Menge mathematischen Stoffes. Dafür wird um so mehr Gewicht darauf verlegt, gewisse immer wieder zur Verwendung gelangende Gedankengänge gründlich auszuarbeiten. Manche Mathematiklehrer werden deshalb dieses Buch als trefflichen Ratgeber gerne benützen.

Von der vorliegenden mathematischen Darstellung zur eigentlichen Anwendung in den Naturwissenschaften ist allerdings noch ein beträchtlicher Schritt zu machen. Es liegt dies in der Hauptsache im Umstand begründet, daß der Begriff des Differentials (des «Integrationsdifferentials» dx) nur als «Symbol» erklärt wird, das «einzig und allein dem Hinweis auf die Variable» (S. 142) dient. Vielleicht ist es in der zweiten Auflage möglich, daß der Autor in dieser Richtung demjenigen, der die Mathematik anzuwenden hat, doch etwas mehr bietet. Es wären wohl auch einige Worte über die Rolle von Unstetigkeitsstellen beim Integrationsprozeß am Platze. Bei der im übrigen gepflegten Gründlichkeit des Aufbaues vermißt man eine Erläuterung darüber, daß offenbar ausschließlich mit reinen Zahlen (Maßzahlen) operiert wird, wenn auch z. B. das Bogenmaß des Winkels als *Länge* eines Bogens (S. 115) erklärt wird. Für eine größere, ja leicht zu bietende Anschaulichkeit der etwas einseitig formalen Erklärung der Substitutionsmethode (§ 20, 72) beim Integrieren würde mancher Leser dankbar