Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **3 (1948)**

Heft 1

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Kleine Mitteilungen

I. *Construction du pentadécagone*

La construction du pentadécagone (15 côtés) peut être obtenue facilement en partant du pentagone. Nous avons donné un tracé rapide de la division du cercle en cinq parties égales dans nos *Eléments de calcul infinitésimal* p. 147. Nous reproduisons cette figure ici (fig. 1). Nous faisions remarquer alors que cette construction donne en même temps une trisection de l'angle de 72 degrés. Cette remarque peut être utilisée pour la

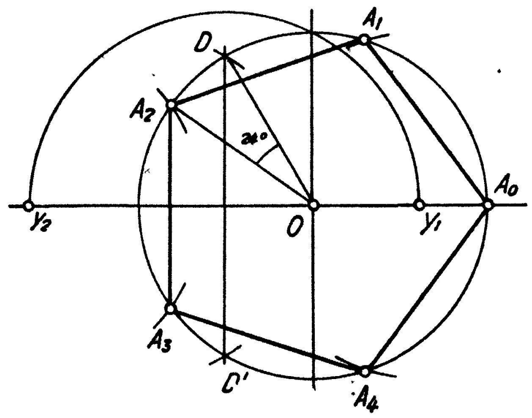

Fig. 1

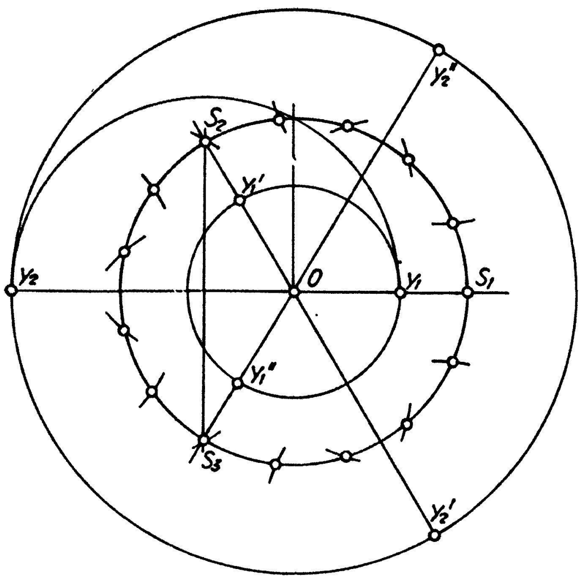

Fig. 2

division du cercle en quinze parties égales. Il suffit de reproduire trois fois cette construction du pentagone en prenant pour sommet ($z = 1$) successivement les points A_0, D et D', ce qui donne le tracé suivant (fig. 2).

Les racines de l'équation

$$y^2 + y - 1 = 0$$

étant trouvées, on trace les deux cercles de rayon OY_1 et OY_2; puis on prend successivement S_1, S_2, S_3 comme sommet principal d'un pentagone. On trace les diamètres passant par ces trois points, ce qui donne les points Y_1, Y_2, Y_1', Y_2', Y_1'', et Y_2''. Avec une ouverture de compas égale au rayon du cercle de base, on obtient rapidement les 15 points sur ce cercle. Cette construction ne demandant aucun report est donc très précise.

Algébriquement, la question se présente comme suit:

Il faut résoudre l'équation $z^{15} - 1 = 0$ que l'on peut mettre sous la forme

$$(z - 1)(z^{14} + z^{13} + \cdots + z + 1) = 0.$$

Une solution réelle $z = 1$, sommet principal.

Pour trouver les racines de l'équation de degré 14, groupons les termes en trois groupes.

$$(z^{14} + z^{13} + \cdots + z^{10}) + (z^9 + z^8 + \cdots + z^5) + (z^4 + z^3 + \cdots + 1) = 0$$

ou

$$(z^4 + z^3 + \cdots + 1)(z^{10} + z^5 + 1) = 0.$$

Le premier facteur que l'on étudie dans la recherche de la construction du pentagone, se ramène à une équation de la forme $y^2 + y - 1 = 0$ avec $y = z + \frac{1}{z}$. Elle donne quatre racines imaginaires précisant la position de quatre sommets du pentagone. Le deuxième facteur peut s'écrire $u^2 + u + 1 = 0$ avec $u = z^5$. Ses racines sont

$$u_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

qui sont les racines imaginaires cubiques de l'unité. On peut donc écrire:

$$u_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right),$$

$$u_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right).$$

Mais $u = z^5$; d'où

$$z_{1\,(1,2,3,4,5)} = \cos\left(\frac{2\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}\right),$$

$$z_{2\,(1,2,3,4,5)} = \cos\left(\frac{4\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}\right), \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

ce qui donne pour les $z_{1,i}$ la suite

$$z_{1,1} = \cos 24^0 + i \sin 24^0,$$

$$z_{1,2} = \cos 96^0 + i \sin 96^0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$z_{1,5} = \cos 312^0 + i \sin 312^0,$$

et pour les $z_{2,i}$,

$$z_{2,1} = \cos 48^0 + i \sin 48^0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$z_{2,5} = \cos 336^0 + i \sin 336^0.$$

Ce sont deux pentagones; en tenant compte du premier facteur, on a bien les trois pentagones emboités, et la construction ci-dessus se justifie d'elle-même; le point S_2 correspond à la racine $z_{2,3}$ et le point S_3 à la racine $z_{1,4}$.

Adrien Grosrey, Genève.

II. *A propos de la trisection de l'arc de Durer*

La trisection de l'arc proposée par Durer est la suivante: triséquer la corde de l'arc donné; par les points de section, mener les perpendiculaires à la corde: on détermine ainsi sur l'arc trois arcs partiels sensiblement égaux; la corde moyenne de ces trois arcs est pratiquement égale à celle de l'arc cherché.

Les constructions de trisection peuvent toujours être ramenées à des trisections de petits arcs. Pour qu'une trisection de petit arc soit acceptable, son erreur doit être d'un ordre supérieur à celui de l'arc donné; comme l'erreur est évidemment indépendante du sens de l'arc, son ordre est impair, soit au moins trois. Pour la construction de Durer, nous allons montrer qu'elle est d'ordre cinq, ce qui est excellent.

Pour effectuer la démonstration, appelons x la valeur des deux arcs extrêmes donnés par la construction et y l'arc intermédiaire et appliquons les développements en série classiques, limités à l'ordre 3. Le problème est de déterminer corde $\frac{\alpha}{3}$ où α est l'arc donné.

$$\text{Corde}\,\frac{\alpha}{3} = 2\sin\frac{\alpha}{6} = \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^3}{2^3\cdot 3^4}\,.$$

La construction donne

$$\sin\frac{y}{2} = \frac{1}{3}\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{6} - \frac{\alpha^3}{2^4\cdot 3^2} = \frac{\text{corde}\,y}{2}\,,$$

$$x = \frac{\alpha}{2} - \frac{y}{2} = \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha^3}{2\cdot 3^4}\,,$$

$$\text{corde}\,x = \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha^3}{2^3\cdot 3^3}\,,$$

$$\frac{1}{3}\,(2\cdot\text{corde}\,x + \text{corde}\,y) = \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^3}{2^3\cdot 3^4}\,.$$

Cette expression coïncide avec celle de la corde de $\frac{\alpha}{3}$; l'erreur est donc d'ordre cinq au moins. Le calcul montre que son coefficient est de l'ordre de $3\cdot 10^{-4}$ et que la corde moyenne est trop courte. P. Rossier, Genève.

III. *Grands nombres*

J'ai connu un commençant en algèbre qui, ayant appris avec satisfaction que le plus grand nombre que dans les notations habituelles on peut écrire avec trois chiffres est $9^{(9^9)}$, avait entrepris le calcul de ce nombre comme exercice de multiplication! Quelque peu effrayé, il m'appela à l'aide. Cette aide consista à lui calculer, au moyen de la table de logarithmes à 12 décimales contenue dans la table Dupuis les quelques résultats suivants

n	n^n	$n^{(n^n)}$	Place
1	1	1	
2	4	16	
3	27	7625597484961	
4	256	$1{,}340719\cdot 10^{154}$	
5	3125	$1{,}911015\cdot 10^{2184}$	1-2 pages
6	46656	$2{,}6775\cdot 10^{36305}$	14 pages
7	823543	$3{,}7598\cdot 10^{695974}$	1 volume
8	16777216	$4{,}778\cdot 10^{15151335}$	30 volumes
9	387420489	$4{,}3\cdot 10^{369693099}$	740 volumes
10		$10^{10000000000}$	20000 volumes

La confusion de $n^{(n^n)}$ avec $(n^n)^n = n^{n^2}$ est grave, ainsi que le montre le tableau ci-dessous

$$\begin{aligned}
2^4 &= 16\\
3^9 &= 19683\\
4^{16} &= 4294967296\\
5^{25} &= 298023223876953125\\
6^{36} &= 1{,}03144\cdot 10^{28}\\
7^{49} &= 2{,}56924\cdot 10^{41}\\
8^{64} &= 6{,}27710\cdot 10^{57}\\
9^{81} &= 1{,}96627\cdot 10^{76}
\end{aligned}$$

Tous ces nombres tiennent chacun en moins de deux lignes. P. Rossier, Genève.
