Über mathematische Mittelwerte

Autor(en): **Jecklin, Heinrich**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **3 (1948)**

Heft 1

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-13570

Über mathematische Mittelwerte

I. Seien gegeben n positive Werte $0 < a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \ldots \leqq a_n$. Wir verstehen dann unter m einen Mittelwert bezüglich dieses Systems der a_i, wenn für endliches n gilt $a_1 < m < a_n$, ausgenommen wenn alle a_i einander gleich sind, das heißt $a_i \equiv a$, in welchem Falle auch $m = a$.

Wir bilden nun mit Hilfe der Größen a_i ein symmetrisches homogenes Aggregat von nur positiven Gliedern, deren irgendeines die Gestalt habe $A_i = a_1^{t_1} a_2^{t_2} \ldots a_i^{t_i}$. Dabei sind die Exponenten t positive Zahlen. Die Summe der Exponenten eines Gliedes sind seine Dimension T, und da das Aggregat als homogen vorausgesetzt ist, haben alle Glieder die gleiche Dimension. Die Zahl der Glieder des Aggregats betrage N.

Ist $f(x)$ eine im Intervall $[x_1, x_n]$ eindeutige, stetige und im engeren Sinne monoton zunehmende (oder abnehmende) Funktion und sei $f(x_1) = X_1$ und $f(x_n) = X_n$, dann ist bekanntlich die inverse Funktion $x = \varphi(y)$ ebenfalls eindeutig, stetig und im engeren Sinne monoton zunehmend im Intervall $[X_1, X_n]$ (bzw. abnehmend in $[X_n, X_1]$). Wenn nun $f(m)$ ein Wert zwischen X_1 und X_n ist, so existiert wegen der vorausgesetzten Eindeutigkeit und Monotonie eine bestimmte Position m zwischen x_1 und x_n, welcher der Funktionswert $f(m)$ entspricht.

Nach dieser Vorbereitung definieren wir einen Mittelwert m für das System der n Größen a_i durch die Gleichung

$$N \cdot f(m^T) = \Sigma f(A_i), \tag{I}$$

wobei f so zu wählen ist, daß es die genannten Eigenschaften besitzt im Intervall $[a_1^T, a_n^T]$. Explizit ist dann also m gegeben durch die Formel

$$m = \left[\varphi\left(\frac{\Sigma f(A_i)}{N}\right)\right]^{1/T}. \tag{II}$$

Wie man sieht, ist eine Mittelwertformel *eo ipso* eine symmetrische Funktion der zu mittelnden Werte a_i. Daß m tatsächlich ein Mittelwert ist, kann leicht gezeigt werden. Wir geben den Beweis unter der Voraussetzung, daß f monoton steigend ist; der Fall der monoton sinkenden Funktion ergibt sich in sinngemäßer Modifikation. Lassen wir weiter den trivialen Fall $a_i \equiv a$ außer Betracht, so gilt

$$N \cdot a_i^T < \Sigma A_i < N \cdot a_n^T,$$

$$f(a_1^T) < \frac{1}{N} \Sigma f(A_i) < f(a_n^T),$$

$$a_1^T = \varphi(f(a_1^T)) < \varphi\left(\frac{\Sigma f(A_i)}{N}\right) < \varphi(f(a_n^T)) = a_n^T,$$

$$a_1 < \left[\varphi\left(\frac{\Sigma f(A_i)}{N}\right)\right]^{1/T} < a_n. \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Setzen wir

$$m = \left[\varphi\left(\frac{\Sigma f(A_i)}{N}\right)\right]^{1/T} = \Phi(a_1 \ldots a_n),$$

dann ist offenbar

$$\Phi(m \ldots m) = \left[\varphi\left(\frac{\Sigma f(m^T)}{N}\right)\right]^{1/T} = \sqrt[T]{\varphi(f(m^T))} = m.$$

Eine explizite Mittelwertformel $\Phi(a_1 \ldots a_n)$ genügt also der Gleichung

$$\Phi(m \ldots m) = \Phi(a_1 \ldots a_n),$$

es ist aber umgekehrt durch diese Gleichung noch kein Mittelwert definiert. Man sieht dies leicht an einem Gegenbeispiel. Sei $m = \frac{a_1^3 + a_2^3}{2\,a_1 a_2}$, so ist immer

$$\Phi(a_1, a_2) = \Phi(m, m),$$

denn $\frac{m^3 + m^3}{2\,m^2} = m$. Aber m ist hier nicht notwendigerweise ein Mittelwert. Für $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ beispielsweise resultiert $m = 4^2/_3$. Diese Feststellung zwingt zur Forderung, daß nur solche Formeln als Mittelwertformeln zu bezeichnen sind, welche stets, das heißt ohne Beschränkung auf bestimmte Auswahl der a_i, einen Mittelwert liefern.

II. Die Sachlage gestaltet sich besonders einfach und übersichtlich, wenn wir für das eingangs erwähnte homogene symmetrische Aggregat der Größen a_i eine elementarsymmetrische Funktion derselben wählen. Wir beschränken uns hier auf diesen Fall, was um so berechtigter erscheint, als bekanntlich jedes symmetrische Aggregat rational und ganz durch die elementarsymmetrischen Funktionen ausgedrückt werden kann. Das Glied A_i ist nun also irgendeine Kombination zur Klasse r ohne Wiederholung aus den n Größen a_i; es werde mit $\underset{r}{C}\, a_i$ bezeichnet. Die Anzahl N dieser Glieder ist nun offenbar $\binom{n}{r}$. Nunmehr definieren wir einen einfachen Mittelwert m durch die Gleichung

$$\binom{n}{r} \cdot f(m^r) = \Sigma f(\underset{r}{C}\, a_i), \tag{III}$$

wobei für f im Intervall $[a_1^r, a_n^r]$ die vorgenannten Eigenschaften vorausgesetzt sind. Setzen wir $\Sigma f(\underset{r}{C}\, a_i) = F(a_i)$, so ist m explizit gegeben durch die Formel

$$m = \left[\varphi\left(\frac{F(a_i)}{\binom{n}{r}}\right)\right]^{1/r}. \tag{IV}$$

Da n Elementen ebenso viele elementarsymmetrische Funktionen zugehören, kann man also bei gegebener Funktion f auf n verschiedene Arten ($r = 1 \ldots n$) einen einfachen Mittelwert bilden.

Bei Wurzeln ist stets nur der positive Wert in Betracht zu ziehen. Wir können nun die sogenannten gewogenen Mittelwerte einführen, indem wir jedem der $\binom{n}{r}$ Funktionswerte $f(\underset{r}{C}\, a_i)$ ein positives Gewicht g_i zuordnen. Es kann dies dahingehend aufgefaßt werden, daß die Funktion $F(a_i)$ statt aus $\binom{n}{r}$ aus Σg_i additiven Gliedern zusammengesetzt ist. Ein gewogener einfacher Mittelwert ist demnach gegeben durch die Formel

$$m_g = \left[\varphi\left(\frac{\Sigma g_i \cdot f(\underset{r}{C}\, a_i)}{\Sigma g_i}\right)\right]^{1/r}. \tag{V}$$

III. Im Hinblick auf praktische Belange wird man die Funktion f so wählen, daß die inverse Funktion φ explizit einfach verifizierbar ist. Ohne weiteres ist ersichtlich, daß eine additive oder multiplikative Konstante immer unwesentlich ist. Wir setzen nun in (III) speziell $r = 1$, also

$$n \cdot f(m) = \Sigma f(a_i) \tag{VI}$$

und zeigen, daß damit die in der Praxis gebräuchlichen Mittelwertformeln bereits erfaßt sind:

a) Wenn $f(a) = a^t$, so ist

$$n \cdot m^t = \Sigma a_i^t \quad \text{bzw.} \quad m = \sqrt[t]{\frac{\Sigma a_i^t}{n}}.$$

Es ist dies die Klasse der einfachen Potenzmittel.
Für $t = 1$ insbesondere resultiert das arithmetische Mittel:

$$m = \frac{\Sigma a_i}{n}.$$

Für $t = 2$ haben wir das quadratische Mittel:

$$m = \sqrt{\frac{\Sigma a_i^2}{n}}.$$

Für $t = -1$ ergibt sich das harmonische Mittel:

$$m = \frac{n}{\sum \frac{1}{a_i}}.$$

Bei Einführung von Gewichten erhalten wir als einfaches gewichtetes Potenzmittel:

$$m_g = \sqrt[t]{\frac{\Sigma g_i a_i^t}{\Sigma g_i}}.$$

Für $g_i = a_i$ und $t = 1$ ist dies das kontraharmonische Mittel:

$$m = \frac{\Sigma a_i^2}{\Sigma a_i}.$$

b) Setzt man $f(a) = \log a$, so folgt

$$n \cdot \log m = \Sigma \log a_i,$$

also

$$\log m = \frac{1}{n} \Sigma \log a_i, \quad \text{oder} \quad m = \sqrt[n]{\Pi a_i}.$$

Dies ist das logarithmisch-arithmetische Mittel oder das geometrische Mittel. Mit Gewichten erhalten wir:

$$\Sigma g_i \cdot \log m = \Sigma g_i \cdot \log a_i,$$

mithin

$$m_g = [\Pi a_i^{g_i}]^{1/\Sigma g_i}.$$

c) Es sei $f(a) = c^a$, $c =$ konstant. Dann ist $n \cdot c^m = \Sigma c^{a_i}$, und daraus

$$m = \frac{\log\left(\frac{1}{n} \Sigma c^{a_i}\right)}{\log c} = \frac{\log \Sigma c^{a_i} - \log n}{\log c}.$$

Diese transzendente Mittelbildung findet zum Beispiel Verwendung in der Versicherungsmathematik, um das mittlere technische Alter von Personengruppen zu bestimmen. Es bedeuten dann n die Zahl der Personen, a_i die bezüglichen Alter und c die Makehamsche Konstante.

Das entsprechende gewichtete Mittel $\Sigma g_i \cdot c^m = \Sigma g_i \cdot c^{a_i}$, woraus

$$m_g = \frac{\log \Sigma g_i \cdot c^{a_i} - \log \Sigma g_i}{\log c}$$

wird beispielsweise in der Finanzmathematik angewendet zur Berechnung des mittleren Zahlungstermins, wenn mehrere nach verschiedenen Perioden (a_i) fällige Zahlungen (g_i) durch eine einmalige Zahlung (Σg_i) nach m Perioden ersetzt werden sollen; c bedeutet in diesem Zusammenhange den Aufzinsungsfaktor.

d) Mit $f(a) = a^2 + a$ sei noch ein Beispiel gegeben, um weitere Möglichkeiten der Bildung von Mittelwertformeln anzudeuten. Es würde folgen:

$$n(m^2 + m) = \Sigma(a_i^2 + a_i),$$

also

$$m = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{n}\Sigma(a_i^2 + a_i)}\,.$$

Daß diese ungewohnte Formel immer einen Mittelwert liefert, ist sofort ersichtlich, denn aus

$$n \cdot a_1 < \Sigma a_i < n \cdot a_n$$

folgt

$$n\left(a_1^2 + a_1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) < \Sigma(a_i^2 + a_i) < n\left(a_n^2 + a_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right),$$

also

$$\left(a_1 + \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{4} + \frac{1}{n}\Sigma(a_i^2 + a_i) < \left(a_n + \frac{1}{2}\right)^2,$$

und damit

$$a_1 < -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{n}\Sigma(a_i^2 + a_i)} < a_n.$$

IV. Sei nun r in (III) so gewählt, daß $n \geqq r \geqq 1$, so ergeben sich analoge Möglichkeiten, wie unter III besprochen, nur daß die Funktion f über $\underset{r}{C}\, a_i$ als Variable zu bilden ist. Setzen wir insbesondere wieder $f(a) = a^t$, so erhalten wir die verallgemeinerten Potenzmittel

$$\binom{n}{r} \cdot m^{r \cdot t} = \Sigma(\underset{r}{C}\, a_i)^t,$$

und ist hierin speziell $t = 1$, so ergeben sich die grundlegenden elementaren Mittelwerte

$$\binom{n}{r} \cdot m^r = \Sigma \underset{r}{C}\, a_i = s_r,$$

das heißt

$$m = \sqrt[r]{\frac{\Sigma \underset{r}{C}\, a_i}{\binom{n}{r}}} = \sqrt[r]{\frac{s_r}{\binom{n}{r}}}.$$

s_r, $r = 1, 2, \ldots, n$, sind die sogenannten elementarsymmetrischen Funktionen der n Größen a_i.

Es gibt zu n Größen a_i stets n grundlegende elementare Mittelwerte:

$$m(s_1) = \frac{\Sigma a_i}{n} = \frac{s_1}{n},$$

$$m(s_2) = \sqrt{\frac{a_1 a_2 + a_1 a_3 + \cdots + a_{n-1} a_n}{\binom{n}{2}}} = \sqrt{\frac{s_2}{\binom{n}{2}}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m(s_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \sqrt[n]{s_n},$$

wovon der erste das arithmetische und der letzte das geometrische Mittel ist.

Bezüglich der n grundlegenden elementaren Mittelwerte eines Systems von n Größen gilt:

$$m(s_1) \geqq m(s_2) \geqq m(s_3) \geqq \ldots \geqq m(s_n). \qquad \text{(VII)}$$

Was den Beweis dieses Satzes anbelangt, sowie auch hinsichtlich der im folgenden ohne Beweis gemachten Angaben, sei verwiesen auf die vom Verfasser gemeinsam mit Herrn Dr. EISENRING publizierte Arbeit «Die elementaren Mittelwerte» (Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Band 47, 1).

Mittels der nachgenannten drei Rechenregeln, welche für Mittelwertformeln der Gestalt $m = \sqrt[r]{\frac{Z}{N}}$ Geltung haben, kann aus den grundlegenden elementaren Mitteln eine unendliche Vielfalt zusammengesetzter Mittelwertformeln abgeleitet werden:

1. Multiplikationssatz: Sind $m_1 = \sqrt[l]{\frac{Z_1}{N_1}}$ und $m_2 = \sqrt[t]{\frac{Z_2}{N_2}}$, mit l und $t > 0$, zwei Mittelwerte, so ist auch $m = \left[\left(\frac{Z_1}{N_1}\right)^h \cdot \left(\frac{Z_2}{N_2}\right)^k\right]^{\frac{1}{l \cdot h + t \cdot k}}$, wo $h \geqq 0$, $k \geqq 0$, ein Mittelwert.

2. Additionssatz I: Sind $m_1 = \sqrt[l]{\frac{Z_1}{N_1}}$ und $m_2 = \sqrt[l]{\frac{Z_2}{N_2}}$, mit $l > 0$, zwei Mittelwerte, so ist auch $m = \left[\frac{Z_1 \cdot h + Z_2 \cdot k}{N_1 \cdot h + N_2 \cdot k}\right]^{1/l}$, wo $h \geqq 0$, $k \geqq 0$, ein Mittelwert.

3. Additionssatz II: Sind $m_1 = \sqrt[l]{\frac{Z_1}{N_1}}$ und $m_2 = \sqrt[t]{\frac{Z_2}{N_2}}$, mit l und $t > 0$, zwei Mittelwerte, so ist auch $m = \frac{\sqrt[l]{Z_1 \cdot h} + \sqrt[t]{Z_2 \cdot k}}{\sqrt[l]{N_1 \cdot h} + \sqrt[t]{N_2 \cdot k}}$, wo $h \geqq 0$, $k \geqq 0$, ein Mittelwert.

Bei inverser Vornahme dieser Operationen können auch (aber müssen nicht!) Mittelwerte entstehen.

In Anwendung auf die grundlegenden elementaren Mittelwerte ergibt die Verbindung des Multiplikationssatzes mit Additionssatz I die Möglichkeit der Bildung von Mittelwertformeln der Gestalt

$$m = \sqrt[l]{\frac{\Sigma \alpha_i \Pi s_r^h}{\sum \alpha_i \Pi \binom{n}{r}^h}}, \qquad \alpha_i \lesseqgtr 0, \qquad \Sigma r h = l \text{ für jedes } \Pi. \qquad \text{(VIII)}$$

Werden die α_i so gewählt, daß im Zähler ein homogenes, in den a_i symmetrisches Aggregat der Dimension l von lauter positiven Gliedern entsteht, so ist m sicher ein Mittelwert. Da jede ganze symmetrische Funktion von n Größen als rationale ganze

Funktion der n elementar-symmetrischen Funktionen darstellbar ist, können die α_i insbesondere so angesetzt werden, daß m ein einfaches Potenzmittel ist, also

$$m = \sqrt[l]{\frac{\Sigma a_i^l}{n}}.$$

Für die Potenzmittel gilt:

$$\cdots \geqq \sqrt[l]{\frac{\Sigma a^l}{n}} \geqq \sqrt[l-1]{\frac{\Sigma a^{l-1}}{n}} \geqq \cdots \geqq \sqrt{\frac{\Sigma a^2}{n}} \geqq \frac{\Sigma a}{n} \geqq \sqrt[0]{\frac{n}{n}} \geqq \frac{n}{\Sigma a^{-1}} \geqq \sqrt{\frac{n}{\Sigma a^{-2}}} \geqq \cdots.$$

Aus Überlegungen, die sich auf die Stetigkeit stützen, folgt, daß der zunächst unbestimmte Ausdruck $\sqrt[0]{\frac{n}{n}}$ dem geometrischen Mittel $\sqrt[n]{\Pi a_i}$ identisch ist.

Versehen wir das Potenzmittel mit Potenzen der a_i als Gewichten, so erhalten wir eine interessante Klasse von Mittelwertformeln:

$$m(k, l) = \sqrt[l]{\frac{\Sigma a_i^{k+l}}{\Sigma a_i^k}}, \qquad -\infty < k, l < +\infty, \qquad \text{(IX)}$$

in welcher alle klassischen Mittel enthalten sind. Man verifiziert sofort, daß

$$m(k, l) = m(k + l, -l).$$

Des weitern gilt

$$a_1 \xleftarrow[\lim l = -\infty]{} \sqrt[l]{\frac{\Sigma a_i^{k+l}}{\Sigma a_i^k}} \xrightarrow[\lim l = +\infty]{} a_n,$$

und ebenso für die limes von k.

Durch Formel (IX) wird über der (k, l)-Ebene eine Fläche definiert, deren Niveauverhältnisse durch folgende Merkmale charakterisiert sind:

Für festes l gilt	$m(k, l)$	$< m(k + t, l)$.
Für festes k gilt	$m(k, l)$	$< m(k, l + t)$.
Für konstante Differenz $(k - l)$ gilt	$m(k, l)$	$< m(k + t, l + t)$.
Für konstante Summe $(k + l)$ gilt	$m(k, l + t)$	$< m(k + t, l)$.

Hieraus folgt insbesondere

$$m(0, -1) < m(0, 0) < m(0, 1) < m(0, 2) < m(1, 1),$$

oder was dasselbe

$$m(-1, 1) < m(0, 0) < m(1, -1) < m(2, -2) < m(2, -1),$$

das heißt

$$\frac{n}{\Sigma a^{-1}} < \sqrt[n]{\Pi a} < \frac{\Sigma a}{n} < \sqrt{\frac{\Sigma a^2}{n}} < \frac{\Sigma a^2}{\Sigma a}.$$

Somit gilt stets: harmonisches Mittel < geometrisches Mittel < arithmetisches Mittel < quadratisches Mittel < kontraharmonisches Mittel.

HEINRICH JECKLIN, Zürich.