

Über eine symbolisch-topologische Formel

Autor(en): **Hadwiger, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **2 (1947)**

Heft 2

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-12818>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

und ein Drehmoment um die z -Achse:

$$\mathfrak{D}_z = k \rho \cos \alpha = 2 m \omega \Omega \rho^2 \cos^2 \alpha.$$

Betrachten wir vier symmetrische Punkte m_1, m_2, m_3, m_4 des in Fig. 5 perspektivisch gezeichneten Ringes K , so haben die entsprechenden CORIOLISbeschleunigungen c_1, c_2, c_3, c_4 die dort ersichtlichen Richtungen, weil $\cos \alpha$ für m_1 und m_4 positiv, für m_2 und m_3 negativ zu setzen ist. Daraus ist schon zu ersehen, daß die Summe der Drehmomente für den ganzen Ring in bezug auf die y -Achse Null wird, während dies für die z -Achse nicht der Fall ist. Die Rechnung bestätigt dies und ergibt folgendes Resultat. Ein Element des Ringes hat das Volumen $q \rho d\alpha$, wenn q der (unendlich kleine) Querschnitt des Ringes ist. Ist μ die Dichte der Masse, so ist $m = \mu q \rho d\alpha$. Somit ist

$$d_y = 2 \mu q \rho^3 \omega \Omega \cos \alpha \sin \alpha d\alpha,$$

$$d_z = 2 \mu q \rho^3 \omega \Omega \cos^2 \alpha d\alpha,$$

$$\mathfrak{D}_y = \sum d_y = 2 \mu q \rho^3 \omega \Omega \int_0^{2\pi} \cos \alpha \sin \alpha d\alpha = 0,$$

$$\mathfrak{D}_z = \sum d_z = 2 \mu q \rho^3 \omega \Omega \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha = \underline{\underline{2 \pi \mu q \rho^3 \omega \Omega}}.$$

$2 \pi \mu q \rho^3$ ist gleich dem *Trägheitsmoment* des Ringes bezüglich der x -Achse. Bezeichnen wir dieses mit Θ_x , so können wir schreiben:

$$\mathfrak{D}_z = \Theta_x \Omega \omega.$$

Bei der Drehung des Ringes K um die y -Achse ist also ein Drehmoment um die z -Achse von der Größe \mathfrak{D}_z aufzuwenden. Die Formel für \mathfrak{D}_z gilt auch, wenn statt des unendlich dünnen Ringes ein Ring mit endlichem Querschnitt oder eine Scheibe usw. vorliegt, da man diese Rotationskörper in Elementarringe zerlegen kann. Unter Θ_x ist dann das Trägheitsmoment des ganzen Rotationskörpers um die x -Achse zu verstehen. Auf dem oben abgeleiteten Drehmoment beruht bekanntlich die Wirkung des Kreisels, worauf hier nicht näher eingegangen werden soll. Man erkennt aber aus obiger Elementarableitung deutlich, daß die Kreiselswirkung ihre Ursache in der bei der Bewegung des Kreisels auftretenden CORIOLISbeschleunigung seiner Massenpunkte hat.

W. MICHAEL, Bern

Über eine symbolisch-topologische Formel

In der vorliegenden Note soll eine elementare topologische Formel der ebenen Geometrie besprochen werden, die an sich keinen dem Topologen unbekanntem Sachverhalt enthüllt, die aber in der nachfolgend erörterten symbolischen Gestalt der Betrachtung wert ist.

In dieser Form umfaßt die Formel verschiedene kombinatorisch-topologische Relationen und Aussagen, wie beispielsweise den EULERSchen Polyedersatz, die Baumrelation, den HELLY-RADONSchen Satz sowie zahlreiche kombinatorische Formeln, wie sie etwa bei der Zerlegung der Ebene durch Geraden auftreten usw.

Es kann darauf hingewiesen werden, daß die Formel in verschiedenartiger Weise verallgemeinerungsfähig ist, aber im Hinblick auf den elementaren Charakter der vorliegenden Arbeit empfiehlt sich die getroffene Spezialisierung.

Die nachfolgenden Untersuchungen beschränken sich auf solche ebene Mengen A , die sich als Vereinigungsmenge

$$A = K_1 + K_2 + \cdots + K_n \quad (1)$$

endlich vieler, abgeschlossener, konvexer und beschränkter Mengen K_i darstellen lassen. In Fig. 1 ist eine solche Menge A dargestellt.

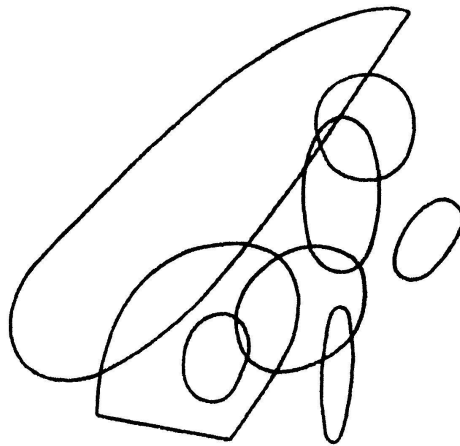


Fig. 1

Alle Mengen dieser Eigenschaft bilden ein Mengensystem, das mit zwei Mengen A und B stets auch die Summe $A + B$ (Vereinigungsmenge) und das Produkt $A B$ (Durchschnitt) enthält.

Im folgenden bezeichne E immer die gesamte Ebene. Da A abgeschlossen ist, wird die komplementäre Menge $E - A$ offen sein. Es bedeute nun $z(A)$ die Zerfallszahl von A , das heißt die Anzahl der verschiedenen Komponenten¹⁾, in die sich A zerlegen läßt; analog bezeichne $z(E - A)$ die Zerfallszahl von $E - A$, das heißt die Anzahl der verschiedenen Gebiete²⁾, in die $E - A$ zerlegt werden kann.

Es gilt nun die folgende symbolische Formel

$$(E - K_1)(E - K_2) \cdots (E - K_n) = z(E - A) - z(A), \quad (2)$$

wobei das linksstehende Produkt vollständig algebraisch zu entwickeln und dann für jeden Summanden 0 oder 1 zu setzen ist, je nach dem der Summand als Mengenprodukt interpretiert leer oder nicht leer ist.

Den Beweis der Formel (2) führen wir induktiv. Wir nehmen an, ihre Richtigkeit sei bereits nachgewiesen für alle Mengen A' , die sich als Summe von $n-1$ konvexen Mengen K_i darstellen lassen. Nun setzen wir

$$A' = K_1 + K_2 + \cdots + K_{n-1}. \quad (3)$$

$$(E - K_1) \cdots (E - K_n) = E(E - K_1) \cdots (E - K_{n-1}) - K_n(E - K_1) \cdots (E - K_{n-1}).$$

Im ersten Ausdruck der rechten Seite kann der Faktor E offenbar weggelassen werden, da er den numerischen Wert des nachfolgenden Produktes nicht beeinflußt.

¹⁾ Unter einer Komponente verstehen wir hier einen größten zusammenhängenden Teil.

²⁾ Ein Gebiet ist eine offene zusammenhängende Menge.

Im zweiten Ausdruck kann ohne Einfluß auf den Produktwert zunächst der Faktor K_n ($n-1$)-mal geschrieben werden, so daß jede einzelne Klammer mit diesem Faktor versehen wird. Offensichtlich kann dann

$$K_n (E - K_i) = (E K_n - K_i K_n)$$

gesetzt werden. Schließlich bleibt die Reduktion

$$(E K_n - K_i K_n) = (E - K_i K_n)$$

der einzelnen Klammern ohne Einfluß auf den numerischen Produktwert. In der Tat ist doch einerseits

$$(E K_n)^{n-1} = E^{n-1} = 1,$$

und andererseits unterscheiden sich alle Entwicklungsglieder der Produkte, die von diesem ersten Glied verschieden sind, nur durch unterschiedliche Potenzen von K_n mit positiven Exponenten. Somit läßt sich jetzt schreiben

$$(E - K_1) \cdots (E - K_n) = (E - K_1) \cdots (E - K_{n-1}) - (E - K_1 K_n) \cdots (E - K_{n-1} K_n).$$

Nach der induktiven Voraussetzung wird also

$$(E - K_1) \cdots (E - K_n) = [z(E - A') - z(A')] - [z(E - A' K_n) - z(A' K_n)]. \quad (4)$$

Setzen wir für eine beliebige Menge A der von uns betrachteten Art

$$\varphi(A) = z(E - A) - z(A), \quad (5)$$

so gilt, wie eine einfache Überlegung lehrt, das bekannte Additionstheorem

$$\varphi(A) + \varphi(B) = \varphi(A + B) + \varphi(AB). \quad (6)$$

Mit Rücksicht auf $\varphi(K_n) = 0$ (wegen der vorausgesetzten Natur von K_n ist nämlich $z(K_n) - z(E - K_n) = 1$) folgt jetzt aus (4)

$$(E - K_1) \cdots (E - K_n) = \varphi(A') + \varphi(K_n) - \varphi(A' K_n) = \varphi(A' + K_n),$$

oder also

$$(E - K_1) \cdots (E - K_n) = \varphi(A).$$

Damit ist gezeigt, daß die Formel (2) auch für alle Mengen A richtig ist, die sich als Summe von n konvexen K_i darstellen lassen. Der induktive Beweis ist jetzt vollständig, da die Formel (2) für $n=1$ sicher in trivialer Weise richtig ist.

Wir gehen nun dazu über, einige Anwendungen und Folgerungen der allgemeinen symbolischen Formel (2) zu besprechen.

1. Streckenkomplexe

Ein Streckenkomplex der Ebene, das heißt ein endliches System von Strecken (Kanten), die bis auf gemeinsame Endpunkte (Ecken) punktfremd sind, ist offenbar eine spezielle Menge der von uns betrachteten Art. In Fig. 2 ist ein derartiger Streckenkomplex abgebildet.

Die konvexen Mengen K_i , aus denen sich die Menge A , das heißt der Streckenkomplex zusammensetzt, sind die einzelnen Kanten.

Die Anzahl der Kanten sei mit k , die Anzahl der Ecken mit e bezeichnet. Ferner bezeichne e_ν die Anzahl derjenigen Ecken von A , in welchen genau ν Kanten zusammenstoßen.

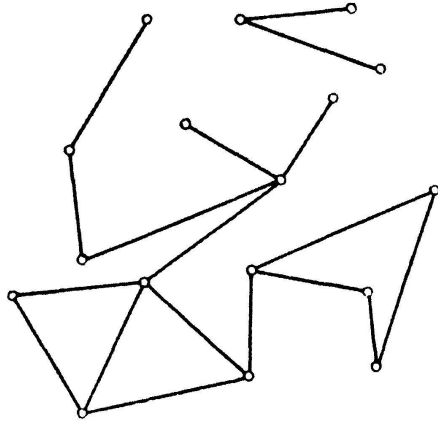


Fig. 2

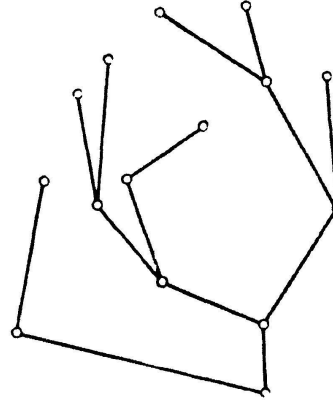


Fig. 3

Es gelten dann die Beziehungen

$$e = e_1 + e_2 + e_3 + \dots, \quad 2k = e_1 + 2e_2 + 3e_3 + \dots \quad (7)$$

Um das Produkt in Formel (2) zu ermitteln, rechnen wir vorbereitend folgendes aus:

$$\begin{aligned} E^k &= 1 \\ K_1 + \dots &= k \\ K_1 K_2 + \dots &= \binom{2}{2} e_2 + \binom{3}{2} e_3 + \dots \\ K_1 K_2 K_3 + \dots &= \binom{3}{3} e_3 + \binom{4}{3} e_4 + \dots \\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

So ergibt sich denn zunächst

$$\begin{aligned} &(E - K_1) (E - K_2) \dots (E - K_k) \\ &= 1 - k + \binom{2}{2} e_2 + \left[\binom{3}{2} - \binom{3}{3} \right] e_3 + \left[\binom{4}{2} - \binom{4}{3} + \binom{4}{4} \right] e_4 + \dots, \end{aligned}$$

oder also nach (2)

$$z(E - A) - z(A) = 1 - k + e_2 + 2e_3 + 3e_4 + \dots,$$

und endlich unter Berücksichtigung der Beziehungen (7):

$$z(E - A) - z(A) = 1 + k - e. \quad (8)$$

Mit (8) haben wir eine allgemeine *topologische Formel für Streckenkomplexe* erhalten¹⁾.

¹⁾ Ist z die Anzahl der zusammenhängenden Teile des Streckenkomplexes A , so nennt man

$$\mu = z + k - e$$

die «Zusammenhangszahl» von A . Vgl. D. KÖNIG, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Leipzig 1936, S. 53.

2. Baumrelation

Für Bäume, das heißt für zusammenhängende kreislose Streckenkomplexe muß in (8) $z(A) = z(E - A) = 1$ gesetzt werden. So ergibt sich die *Baumrelation*¹⁾

$$1 + k - e = 0. \quad (9)$$

In Fig. 3 ist ein Baum abgebildet.

3. Eulerscher Polyedersatz

Wir betrachten einen Streckenkomplex, der das stereographische Bild des Kantensystems eines konvexen Polyeders darstellt.

Ein derartiges Kantenbild entsteht auf die nachfolgend beschriebene Weise:
 - Werden die durch die Seitenflächen des Polyeders bestimmten Ebenen mit E_1, E_2, \dots, E_f bezeichnet, so zerlegt jede Ebene E_i den Raum in einen positiven und einen negativen Halbraum, wobei der positive Halbraum das Polyeder enthalten soll. Es sei nun S ein innerer Punkt des Durchschnittes des zu E_1 gehörenden negativen Halbraums mit den positiven Halbräumen der übrigen Ebenen $E_2 \dots E_f$. Durch Strahlen durch S als Projektionszentrum kann nun der mit E_1 punktfremde Teil der Polyederoberfläche eindeutig auf das Innere der in E_1 liegenden Seitenfläche abgebildet werden. Der Rand dieser Seitenfläche geht außerdem punktweise in sich über. Das so entstehende Abbild des Kantensystems des Polyeders ist ein schlichter Streckenkomplex in der Ebene E_1 .

Jedes von einem geschlossenen Streckenzug umrandete beschränkte Teilgebiet entspricht einer nicht in E_1 liegenden Seitenfläche des Polyeders. Endlich kann man noch das übrigbleibende unbeschränkte äußere Teilgebiet des Streckenkomplexes der in E_1 liegenden Seitenfläche entsprechen lassen.

Offenbar ist dann $z(A) = 1$ und $z(E - A) = f$, wobei f die Anzahl der Seitenflächen des Polyeders bezeichnet. Aus der Beziehung (8) resultiert nun die bekannte *EULERSche Formel*²⁾

$$f - k + e = 2. \quad (10)$$

4. Zerlegungsformel

Wir betrachten ein System von n konvexen beschränkten Mengen K_i , von denen je 2 einen nicht leeren, dagegen je 3 einen leeren Durchschnitt haben. Ihre Vereinigungsmenge A wird offenbar zusammenhängend sein, so daß $z(A) = 1$ ist. In dem hier betrachteten Sonderfall wird der Wert des linksstehenden Produktes in (2)

$$1 - n + \binom{n}{2}$$

sein, so daß sich also die Formel ergibt:

$$z(E - A) = 2 - n + \binom{n}{2}.$$

¹⁾ Vgl. über diesen Satz von LISTING die Ausführungen bei D. KÖNIG (oben zitiert), S. 51.

²⁾ Vgl. zum Beispiel den einfachen Beweis in D. HILBERT-S. COHN-VOSSEN, *Anschauliche Geometrie*, Berlin 1932, S. 255–256.

Dies bedeutet:

«*n* konvexe beschränkte Mengen, von denen je zwei, aber keine drei, einen nicht leeren Durchschnitt haben, zerlegen die Ebene¹⁾ in

$$\frac{n^2 - 3n + 4}{2}$$

Gebiete²⁾». Vergleiche hierzu die Fig. 4 und 5.

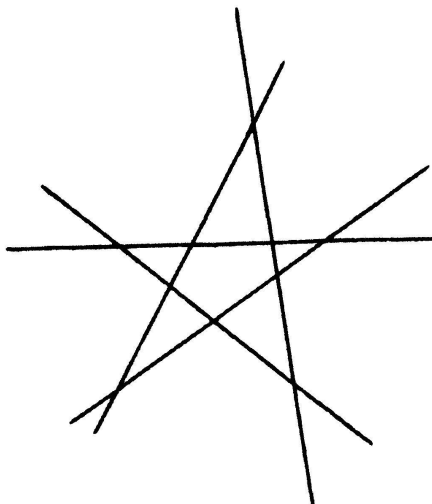


Fig. 4

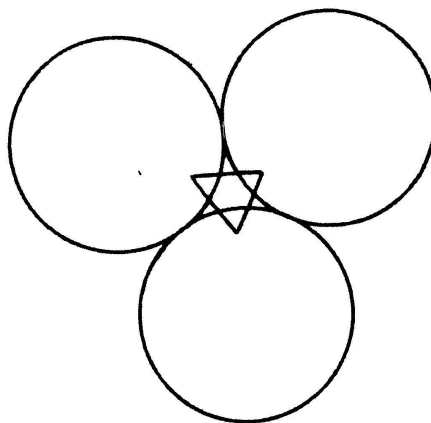


Fig. 5

5. Helly-Radonscher Satz

Wir betrachten ein System von n konvexen beschränkten Mengen K_1 , von denen je 3 einen nicht leeren Durchschnitt haben. Im Falle $n \geq 4$ wählen wir ein beliebiges Teilsystem von 4 Mengen K_i aus und setzen nach unserer Formel (2)

$$(E - K_1)(E - K_2)(E - K_3)(E - K_4) = z(E - A) - z(A).$$

Da offenbar A zusammenhängend ist, wird $z(A) = 1$ sein. Weil A beschränkt ist, muß ferner $z(E - A) \geq 1$ ausfallen, so daß mit Rücksicht auf die oben gegebenen Bedingungen

$$1 - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} - \binom{4}{3} + K_1 K_2 K_3 K_4 \geq 0$$

sein muß. Hieraus folgt nun

$$K_1 K_2 K_3 K_4 = 1,$$

so daß also je 4 Mengen K_i des Systems einen nicht leeren Durchschnitt haben müssen. — Nun betrachten wir im Falle $n \geq 5$ ein Teilsystem von 5 beliebig ausgewählten Mengen K_1 und bilden die 4 konvexen Durchschnittsmengen

$$K_1 K_5, K_2 K_5, K_3 K_5, K_4 K_5.$$

Von diesen haben nach dem soeben bewiesenen Sachverhalt je 3 Mengen einen nicht leeren Durchschnitt und daher müssen nach dem gleichen Sachverhalt alle

¹⁾ Eine abgeschlossene Menge A zerlegt die Ebene E in m Gebiete, wenn die komplementäre Menge $E - A$ in m Gebiete zerfällt.

²⁾ Die hier gelöste Aufgabe steht im engen Zusammenhang mit der Anzahlbestimmung der Gebiete, in die die Ebene durch n Geraden in allgemeiner Lage zerlegt wird. Vgl. E. STEINITZ, Vorlesungen über die Theorie der Polyeder, Berlin 1934, S. 274.

4 Mengen einen nicht leeren Durchschnitt haben; dies bedeutet jedoch, daß die 5 Mengen K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 einen nicht leeren Durchschnitt haben. So kann man analog weiterschließen. Dies bedeutet:

«Wenn von n konvexen beschränkten Mengen je drei einen nicht leeren Durchschnitt haben, so haben alle n Mengen einen nicht leeren Durchschnitt.»

Dies ist bekanntlich eine etwas spezialisierte Fassung des HELLY-RADONSchen Satzes für die Ebene¹⁾.

H. HADWIGER, Bern

Kleine Mitteilungen

Über die Voraussetzungen für die Beweisbarkeit einiger Sätze der Infinitesimalrechnung

K. REIDEMEISTER zeigte in seinem Aufsatz «Zur Infinitesimalrechnung» in den Semesterberichten der Universität Münster, 8. Semester 1935/6, Seite 87, daß gewisse Teile der Differential- und Integralrechnung unabhängig vom Vollständigkeits- oder Cantorsche Axiom aufgebaut werden können. Dazu gehören insbesondere die Regeln über das Differenzieren von Summen, Produkten und Quotienten sowie der ganzen rationalen Funktionen. Ferner ist z. B. eine Funktion stetig ($\epsilon - \delta$ -Bedingung) in einem Punkte, wenn sie dort differenzierbar ist, sie wächst in jenem Punkte, wenn $y' > 0$ ist.

Beim Zeichnen von Funktionsbildern wird nun im Mittelschulunterricht ganz selbstverständlich benützt, daß eine Funktion, die in einem abgeschlossenen Intervall überall eine positive Ableitung besitzt, darin monoton wächst, und man kann sich fragen, ob sich das nicht ohne Vollständigkeitsaxiom beweisen ließe. Die üblichen Beweise verwenden dazu den Mittelwertsatz, der mit dem Satz von Rolle und dieser wieder mit dem Satz vom Maximum bewiesen wird. Zur Herleitung des letzteren aber verwendet man die Definition einer Zahl mittels einer Schachtelung, also letzten Endes das Cantorsche Axiom. Daß dieses nun tatsächlich für einen allgemeinen Beweis nötig ist, zeigt folgendes Beispiel.

«Zahlen» seien alle rationalen Zahlen und nur diese. In diesem Bereich gelten alle Axiome betreffend einen geordneten Körper sowie das Axiom von Eudoxos.

Nun definieren wir eine Funktion für alle (rationalen!) Werte von 0 bis 2 wie folgt: Es sei

$$f(x) = x \text{ für alle } x, \text{ deren Quadrat } < 2 \text{ ist,}$$

$$f(x) = x - 2 \text{ für alle } x, \text{ deren Quadrat } > 2 \text{ ist.}$$

Diese Funktion besitzt folgende Eigenschaften:

1. Sie ist «stetig» im ganzen Intervall $\langle 0, 2 \rangle$, da es ja um jedes x im Inneren des Intervalles ein Intervall gibt, in dem die Funktion durch einen der beiden obigen Ausdrücke allein definiert ist.

2. Sie ist 0 in den Endpunkten des Intervalles $\langle 0, 2 \rangle$.

3. Sie ist stetig differenzierbar im Intervall $\langle 0, 2 \rangle$.

$f'(x)$ ist überall gleich 1, also positiv.

Dagegen sieht man sofort:

I. Die Funktion ist nicht gleichmäßig stetig im Intervall $\langle 0, 2 \rangle$.

II. Sie besitzt darin weder ein Maximum noch ein Minimum.

III. Der Mittelwertsatz ist für das ganze Intervall sowie für gewisse Teilintervalle nicht erfüllt.

IV. Die Funktion nimmt im Intervall $\langle 0, 2 \rangle$ nicht monoton zu.

¹⁾ Vgl. J. RADON, Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten, Math. Ann. 83, 113–115, 1921; E. HELLY, Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten, Jber. D.M.V. 32, 175–176, 1923.