

# Rotation d'un corps solide autour d'un axe

Autor(en): **Kollros, Louis**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **2 (1947)**

Heft 2

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-12815>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts  
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer*

---

El. Math.      Band II      Nr. 2      Seiten 25-48      Basel, 15. März 1947

---

## Rotation d'un corps solide autour d'un axe

On fait tourner un corps d'un angle  $\varphi$  autour d'un axe passant par un point fixe  $O$ , origine d'un système de coordonnées rectangulaires. Un point quelconque  $P(x, y, z)$  du corps aura après la rotation la position  $P_1$  dont on cherche les coordonnées  $(x_1, y_1, z_1)$ .

Soit  $I$  le point d'intersection des tangentes en  $P$  et  $P_1$  au cercle de centre  $C$  et de rayon  $r$ , trajectoire du point mobile; les angles  $PCI$  et  $ICP_1$  sont égaux à  $\frac{\varphi}{2}$  et soit  $\alpha$  l'angle  $POC = P_1OC$ .

On peut arriver de  $O$  à  $I$  par le chemin  $OPI$  et par  $OP_1I$ . Introduisons les vecteurs  $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ ,  $\overrightarrow{OP_1} = \vec{p}_1$ ,  $\overrightarrow{PI}$  et  $\overrightarrow{P_1I}$ ; on aura:

$$\vec{p}_1 + \overrightarrow{P_1I} = \vec{p} + \overrightarrow{PI}.$$

Or,  $\overrightarrow{PI}$  est égal au produit vectoriel  $\vec{a} \times \vec{p}$  si la longueur du vecteur  $\vec{a}$  porté par l'axe est  $a = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ ; on a, en effet:

$$|\vec{a} \times \vec{p}| = a p \sin \alpha = a r = r \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = PI.$$

On voit de même que

$$\overrightarrow{P_1I} = \vec{p}_1 \times \vec{a},$$

et on a l'égalité fondamentale:

$$\underline{\vec{p}_1 + (\vec{p}_1 \times \vec{a}) = \vec{p} + (\vec{a} \times \vec{p})} \quad (1)$$

qu'il faut résoudre par rapport à  $\vec{p}_1$ ; si on la multiplie vectoriellement à gauche par  $\vec{a}$ , en appliquant la formule du double produit vectoriel:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{p}_1 \times \vec{a}) &= a^2 \vec{p}_1 - (\vec{a} \cdot \vec{p}_1) \vec{a} \\ \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{p}) &= (\vec{a} \cdot \vec{p}) \vec{a} - a^2 \vec{p} \end{aligned}$$

on aura:

$$(\vec{a} \times \vec{p}_1) + a^2 \vec{p}_1 - (\vec{a} \cdot \vec{p}_1) \vec{a} = (\vec{a} \times \vec{p}) + (\vec{a} \cdot \vec{p}) \vec{a} - a^2 \vec{p}. \quad (2)$$

La somme de (1) et (2) donne le résultat cherché:

$$\underline{(1 + a^2) \vec{p}_1 = (1 - a^2) \vec{p} + 2(\vec{a} \cdot \vec{p}) \vec{a} + 2(\vec{a} \times \vec{p})} \quad (3)$$

puisque  $\vec{a} \times \vec{p}_1 = -(\vec{p}_1 \times \vec{a})$  et que les deux produits scalaires  $(\vec{a} \cdot \vec{p}_1)$  et  $(\vec{a} \cdot \vec{p})$  sont égaux.

*Exemple:* La rotation de  $120^\circ$  autour de l'axe  $(-13; 5; 13)$ , dans le sens positif, amène le point  $P(2; 6; 9)$  en  $P_1(x_1, y_1, z_1)$ . Le vecteur  $(-13; 5; 13)$  a la longueur  $\sqrt{363} = 11\sqrt{3}$ ; puisque  $\text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$ , il faut porter sur l'axe le vecteur  $\vec{a}\left(-\frac{13}{11}; \frac{5}{11}; \frac{13}{11}\right)$  de longueur  $a = \sqrt{3}$ ;  $1 + a^2 = 4$ ;  $1 - a^2 = -2$ ; le produit scalaire  $(\vec{a} \cdot \vec{p}) = 11$ , et le produit vectoriel  $(\vec{a} \times \vec{p})$  a les composantes  $(-3; 13; -8)$ . L'équation (3) donne

$$2\vec{p}_1 = -\vec{p} + 11\vec{a} + (\vec{a} \times \vec{p})$$

ou

$$\begin{cases} 2x_1 = -2 - 13 - 3 = -18 \\ 2y_1 = -6 + 5 + 13 = 12 \\ 2z_1 = -9 + 13 - 8 = -4. \end{cases}$$

$P_1$  a donc les coordonnées  $(-9; 6; -2)$ .

Si  $P$  tourne de  $120^\circ$  dans le sens inverse, il n'y a que le produit vectoriel qui change de signe dans l'équation (3);  $P$  prend alors la position  $P_2(-6; -7; 6)$ .

La formule (3) est identique aux trois formules connues sous le nom de CAYLEY (ou d'Olinde RODRIGUES en France):

Si  $(b; c; d)$  sont les composantes du vecteur  $\vec{a}$ ,  $a^2 = b^2 + c^2 + d^2$ ;  $(\vec{a} \cdot \vec{p}) = bx + cy + dz$  et les trois composantes de  $(\vec{a} \times \vec{p})$  sont  $(cz - dy; dx - bz; by - cx)$ ; l'équation (3) est équivalente aux trois équations de CAYLEY:

$$\begin{cases} (1 + b^2 + c^2 + d^2)x_1 = (1 + b^2 - c^2 - d^2)x + 2(bc - d)y + 2(bd + c)z \\ (1 + b^2 + c^2 + d^2)y_1 = 2(cb + d)x + (1 - b^2 + c^2 - d^2)y + 2(cd - b)z \\ (1 + b^2 + c^2 + d^2)z_1 = 2(db - c)x + 2(dc + b)y + (1 - b^2 - c^2 + d^2)z. \end{cases} \quad (4)$$

En donnant à  $b, c, d$  des valeurs réelles quelconques, ces formules déterminent toutes les transformations orthogonales réelles; elles conservent la forme  $x^2 + y^2 + z^2$  laissent donc invariante l'ombilicale, l'absolu de la géométrie euclidienne à trois dimensions.

*Formules d'EULER.* Si l'on a sur l'axe un vecteur unitaire  $\vec{u}(\beta; \gamma; \delta)$ ,  $\vec{a} = a\vec{u}$ ;  $a = \text{tg } \frac{\varphi}{2}$ ;  $\frac{1 - a^2}{1 + a^2} = \cos \varphi$ ;  $\frac{2a}{1 + a^2} = \sin \varphi$ ;  $\frac{2a^2}{1 + a^2} = 1 - \cos \varphi$ ; l'équation (3) devient alors:

$$\vec{p}_1 = \vec{p} \cos \varphi + (\vec{u} \cdot \vec{p}) \vec{u} (1 - \cos \varphi) + (\vec{u} \times \vec{p}) \sin \varphi. \quad (3')$$

Elle est équivalente aux trois formules d'EULER:

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \varphi + \beta(\beta x + \gamma y + \delta z)(1 - \cos \varphi) + (\gamma z - \delta y) \sin \varphi \\ y_1 = y \cos \varphi + \gamma(\beta x + \gamma y + \delta z)(1 - \cos \varphi) + (\delta x - \beta z) \sin \varphi \\ z_1 = z \cos \varphi + \delta(\beta x + \gamma y + \delta z)(1 - \cos \varphi) + (\beta y - \gamma x) \sin \varphi. \end{cases} \quad (4')$$

### Emploi des quaternions

La solution du problème des rotations s'écrit élégamment à l'aide des quaternions. Un quaternion  $A = a_0 + \vec{a}$  est la somme d'un nombre  $a_0$  et d'un vecteur  $\vec{a}$ ;  $A' = a_0 - \vec{a}$  est le quaternion conjugué de  $A$ .

Nous désignerons le produit de deux quaternions  $A$  et  $B$  par le symbole  $A \cdot B$ . La loi de multiplication de  $A = a_0 + \vec{a}$  par  $B = b_0 + \vec{b}$  s'exprime par la relation:

$$A \cdot B = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b} + a_0 \vec{b} + b_0 \vec{a} + (\vec{a} \times \vec{b})^1$$

dont la partie scalaire  $c_0 = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$ .  
et la partie vectorielle  $\vec{c} = a_0 \vec{b} + b_0 \vec{a} + (\vec{a} \times \vec{b})$ .

Si l'on désigne les composantes du vecteur  $\vec{a}$  par  $(a_1, a_2, a_3)$  et de même pour  $\vec{b}$   $(b_1, b_2, b_3)$  et  $\vec{c}$   $(c_1, c_2, c_3)$ , on a

$$\begin{cases} c_0 = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 \\ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ c_2 = a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ c_3 = a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{cases}$$

En particulier:  $A \cdot A' = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ : Le produit d'un quaternion par son conjugué est réel: c'est la *norme* de  $A$ ; nous la désignerons par  $N(A) = A \cdot A' = A' \cdot A$ .

On vérifie aisément que  $(A \cdot B)' = B' \cdot A'$  et  $N(A \cdot B) = N(A) N(B)$ . Le produit des quaternions est associatif et distributif, mais pas commutatif.

On appelle *inverse*  $A^{-1}$  d'un quaternion  $A$  le quotient de son conjugué  $A'$  par sa norme:

$$A^{-1} = \frac{A'}{N(A)}$$

et l'on a:  $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = 1$ .

Si l'on multiplie le vecteur  $\vec{p}$  par le quaternion  $1 - \vec{a} = A$ , on trouve:

$$\vec{p} \cdot (1 - \vec{a}) = \vec{p} \cdot \vec{a} + \vec{p} - (\vec{p} \times \vec{a});$$

de même

$$(1 - \vec{a}) \cdot \vec{p}_1 = \vec{a} \cdot \vec{p}_1 + \vec{p}_1 - (\vec{a} \times \vec{p}_1).$$

Notre égalité fondamentale (1) peut donc s'écrire:

$$A \cdot \vec{p}_1 = \vec{p} \cdot A \quad (1')$$

d'où, en multipliant à gauche par  $A^{-1}$ :

$$\vec{p}_1 = A^{-1} \cdot \vec{p} \cdot A$$

ou

$$\underline{N(A) \vec{p}_1 = A' \cdot \vec{p} \cdot A} \quad (5)$$

Cette formule est équivalente aux formules (3) et (4).

Si on remplace  $\vec{a}$  par  $\vec{u} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$  et si on multiplie  $A = 1 - \vec{u} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$  par  $\cos \frac{\varphi}{2}$ , le quaternion

$$A \cos \frac{\varphi}{2} = U = \cos \frac{\varphi}{2} - \vec{u} \sin \frac{\varphi}{2}$$

<sup>1)</sup> HURWITZ, Zahlentheorie der Quaternionen, p. 3 et 4.

est unitaire; sa norme  $N(U) = 1$ ; son conjugué

$$U' = \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{u} \sin \frac{\varphi}{2}.$$

L'équation (5')  $\vec{p}_1 = U' \cdot \vec{p} \cdot U$  est équivalente aux formules (3') et (4'). Elle est commode pour la composition de deux ou plusieurs rotations parce que le produit de deux quaternions unitaires est encore unitaire.

Dans son cours dactylographié *Vektorielle Geometrie* STIEFEL démontre la formule (5') en ramenant la rotation d'angle  $\varphi$  à deux symétries successives relativement à deux plans passant par l'axe et faisant entre eux l'angle  $\frac{\varphi}{2}$ .

LOUIS KOLLROS, Zurich

## Sulle involuzioni cubiche di 2<sup>a</sup> specie

Scopo di questo articolo è di indicare alcune proprietà dell'involuzione  $I_3^2$ , in un campo binario, strettamente collegate alla sua coppia neutra  $c$  ad una notevole terna covariante di elementi.

1. Sopra un ente razionale  $\Omega$ , semplicemente infinito e irriducibile, si abbia una involuzione  $I_3^2$  d'ordine 3 e di specie 2 (o serie lineare  $g_3^2$ ), cioè una totalità  $\infty^2$  di terne di elementi individuate ciascuna, in generale, da due di essi.

La  $I_3^2$  possiede, come è noto, tre elementi tripli  $T_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) costituenti un gruppo della  $I_3^2$  stessa; e due elementi  $N_1, N_2$  formanti una *coppia neutra*, ossia tali da imporre una sola condizione ai gruppi di  $I_3^2$  costretti a contenerli: in tutto il seguito si supporranno distinti (dal punto di vista della geometria sull'ente) tanto  $N_1$  ed  $N_2$  che  $T_1, T_2, T_3$ .

Indichi  $x$  il parametro di un elemento variabile  $X$  di  $\Omega$  (e così  $x_i$  quello di un elemento  $X_i$ ): cioè, più precisamente, la coordinata proiettiva, in qualunque sistema di riferimento, del punto omologo di  $X$  sopra una punteggiata in corrispondenza birazionale con  $\Omega$ . Allora la  $I_3^2$  si può rappresentare con l'equazione:

$$\lambda_1 (x - t_1)^3 + \lambda_2 (x - t_2)^3 + \lambda_3 (x - t_3)^3 = 0, \quad (1)$$

variando ad arbitrio i coefficienti non tutti nulli  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .

2. La coppia neutra ( $N_1, N_2$ ) è caratterizzata dalla equivalenza, rispetto alle variabili  $\lambda_i$ , delle due equazioni che si ottengono ponendo nella (1)  $x = n_1$  ed  $x = n_2$ ; onde  $n_1$  ed  $n_2$  si determinano mediante le formule:

$$(n_1 - t_i)^3 = k (n_2 - t_i)^3 \quad (i = 1, 2, 3),$$

insieme col fattore  $k$  di proporzionalità. Ne discende che  $T_1, T_2, T_3$  formano un gruppo della  $g_3'$  che ha per elementi tripli  $N_1, N_2$ ; e quindi (opportunamente ordinati) un ciclo di ciascuna delle due proiettività cicliche del 3<sup>o</sup> ordine di elementi uniti  $N_1, N_2$ . In conclusione:

**Teorema I.** *La coppia neutra ( $N_1, N_2$ ) dell'involuzione  $I_3^2$  è il covariante Hessiano del gruppo degli elementi tripli  $T_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).*