Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **1 (1946)**

Heft 4

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Man gebe K_c und K_p mit Maßeinheit an und rechne die Konstanten K_c^* und K_p^* für die Reaktion mit ungebrochenen Reaktionszahlen.

Resultate: $K_c = 97{,}7\ \text{cm}^{+3/2}$, $\quad K_c^* = 9{,}55 \cdot 10^3\ \text{cm}^{+3}$

$K_p = 0{,}275\ \text{Atm}^{-1/2}$ $\quad K_p^* = 7{,}57 \cdot 10^{-2}\ \text{Atm}^{-1}$

6. Ein Gemisch von $p_1 = 160$ Torr NO_2 und $p_2 = 400$ Torr N_2O_4 bei 20° C sei gegeben. $K_p = 0{,}788$ Atm bei 322,8° K. Man berechne die Gleichgewichtsdaten a) in molaren Konzentrationen, Partialdrucken und Volumprozenten, b) den Dissoziationsgrad und das mittlere Molekulargewicht. Reaktionsverlauf: $2\,NO_2 \rightarrow N_2O_4$.

Resultat: Wir rechnen in Torr: $K_p' = 0{,}788 \cdot 760$ Torr.
Die Drucke p_1 und p_2 werden auf 322,8° K umgerechnet:
$p_1' = 715{,}4$ Torr, $\quad p_2' = 1788{,}4$ Torr.

Es möge der Partialdruck von N_2O_4 um x Torr abnehmen! Dann ergibt die quadratische Gleichung die Lösungen: $x_1 = 135{,}7$ Torr

$x_2 = -1007$ Torr (unmöglich)

Enddrucke: $p_1 = 986{,}8$ Torr, $p_2 = 1652{,}7$ Torr, bei 322,8° K,

daraus: $[NO_2] = 1{,}207 \cdot 10^{-5}\ \text{Mol/cm}^3$

$[N_2O_4] = 2{,}023 \cdot 10^{-5}\ \text{Mol/cm}^3$

$q_{NO_2} = 0{,}3739$

$q_{N_2O_4} = 0{,}6261$

$\alpha = 0{,}2317$

$\bar{M} = 74{,}69$ g.

P. FRAUENFELDER, Winterthur.

Kleine Mitteilungen

I. *Konstruktion der Hauptträgheitsachsen eines Dreiecks.*

Durch zwei beliebige Dreiecke $A\,B\,C$ und $A^*\,B^*\,C^*$ wird eine Affinität festgelegt. Die Schwerpunkte der Dreiecke entsprechen sich in dieser Affinität, weil sich die Mittellinien eines Dreiecks im Verhältnis 1:2 schneiden und Teilverhältnisse bei affinen Transformationen ungeändert bleiben.

Zu jedem Paar entsprechender Punkte gibt es genau ein Paar rechtwinkliger Achsenkreuze, die sich affin entsprechen. In Figur 1 sind diese Achsenkreuze $(x\,y)$ und $(x^*\,y^*)$ für die Schwerpunkte eingezeichnet worden. (Sie sind zugleich die Achsen der Ellipse, die durch die Eckpunkte des Dreiecks geht und den Schwerpunkt zum Mittelpunkt hat.)

Wählt man diese Achsenkreuze als Koordinatensysteme, so gestaltet sich die Umrechnung der Koordinaten der Systeme sehr einfach:

$x = a\,x^*$

$y = b\,y^*$; a und b sind feste Zahlen.

Für die Zentrifugalmomente der Dreiecke bezüglich dieser Achsen erhält man die Transformationsformel

$$\int_{\Delta}\int xy\,dx\,dy = a^2 b^2 \int_{\Delta^*}\int x^* y^*\,dx^*\,dy^*.$$

Verschwindet das Zentrifugalmoment für eines der beiden sich entsprechenden Dreiecke, so verschwindet es auch für das andere, und die Koordinatenachsen sind dann Hauptträgheitsachsen.

Nun gibt es aber zu jedem beliebigen Dreieck ein gleichseitiges, aus dem es durch eine affine Transformation hervorgeht. Im gleichseitigen Dreieck verschwindet aber das Zentrifugalmoment für jedes durch den Schwerpunkt gelegte Achsenkreuz, die Trägheitsellipse ist also ein Kreis. Konstruiert man bezüglich der Schwerpunkte die affinen rechtwinkligen Achsenkreuze, so ist das Achsenkreuz des gegebenen Dreiecks ein Hauptachsensystem. Das führt auf die in Figur 2 angegebene Konstruktion der Hauptträgheitsachsen eines Dreiecks ABC, bei welcher das gleichseitige Hilfsdreieck C^*BA benützt wurde.

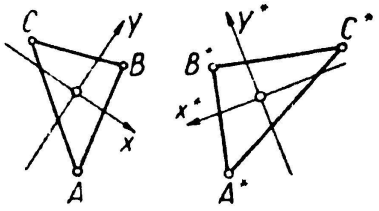


Fig. 1

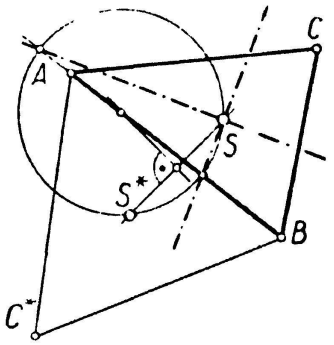


Fig. 2

Diese Konstruktion gestattet auch die Bestimmung der Hauptträgheitsachsen von Parallelogrammen. Man braucht dabei nur ein Quadrat als Hilfsfigur zu benützen.

W. Kissel, Zürich.

II. *Quelques applications des moyennes.* Entre deux nombres positifs donnés, a et b, considérons les trois moyennes:

$$1)\ m=\frac{a+b}{2}\ ;\qquad 2)\ p=\sqrt{ab}\ ;\qquad 3)\ h=\frac{2ab}{a+b}\ .$$

On voit que $mh=ab=p^2$.

Supposons $a>b$; on peut écrire:

$$4ab=(a+b)^2-(a-b)^2<(a+b)^2.$$

On en tire: $\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$ ou $p<m$, et

$\frac{2ab}{a+b}<\frac{a+b}{2}$ ou $h<m$, d'où

$h^2<mh=p^2$ ou $h<p$.

On a donc: $m>p>h$.[1])

Une application de h en mécanique.

Déterminer la vitesse moyenne v_m d'un mobile parcourant successivement deux espaces égaux à e, le premier à la vitesse v_1, le deuxième à la vitesse v_2. Les temps successifs sont $t_1=\frac{e}{v_1}$ et $t_2=\frac{e}{v_2}$, d'où

$$v_m=\frac{2e}{t_1+t_2}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}\ .$$

La vitesse moyenne est la moyenne harmonique des vitesses et non leur moyenne arithmétique.

Application des moyennes à l'extraction des racines carrées.

Soit à extraire $\sqrt{A}$. Décomposons A en un produit ab. $\sqrt{A}=\sqrt{ab}=p$. On a: $m_0=\frac{a+b}{2}>\sqrt{A}$, $h_0=\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{A}$ et $m_0h_0=ab=A$. Formons une suite de couples

[1]) Remarque: Si l'on a $b<a$, on a toujours $h<2b$.

de nombres m_1 et h_1, m_2 et h_2. ....., m_i et h_i, ... de la façon suivante:

$$m_1 = \frac{m_0 + h_0}{2} \text{ et } h_1 = \frac{2 m_0 h_0}{m_0 + h_0}, \ \ldots, \ m_{i+1} = \frac{m_i + h_i}{2} \text{ et } h_{i+1} = \frac{2 m_i h_i}{m_i + h_i}.$$

Les produits $m_1 h_1$, $m_2 h_2$, ..., $m_i h_i$, ... sont constants et égaux à ab. Les nombres m_1, m_2, ..., m_i ... vont en décroissant tout en restant supérieurs à p; les nombres h_1, h_2, ... h_i, ... vont en croissant tout en restant inférieurs à p. La différence $m_i - h_i$ tend vers 0; m_i et h_i ont pour limite commune p. En effet:[1])

1) $m_0 > h_0$, $m_1 > h_1$, ... $m_i > h_i$. (Voir plus haut.)

2) $$m_0 - m_1 = m_0 - \frac{m_0 + h_0}{2} = \frac{m_0 - h_0}{2} > 0,$$

$$m_i - m_{i+1} = \frac{m_i - h_i}{2} > 0 \text{ et}$$

$$h_1 - h_0 = \frac{2 m_0 h_0}{m_0 + h_0} - h_0 = h_0 \frac{m_0 - h_0}{m_0 + h_0} > 0,$$

$$h_{i+1} - h_i = h_i \frac{m_i - h_i}{m_i + h_i} > 0; \text{ d'où}$$

$$m_0 > m_1 > m_2 > \ \ldots \ m_n > p > h_n > \ldots > h_2 > h_1 > h_0.$$

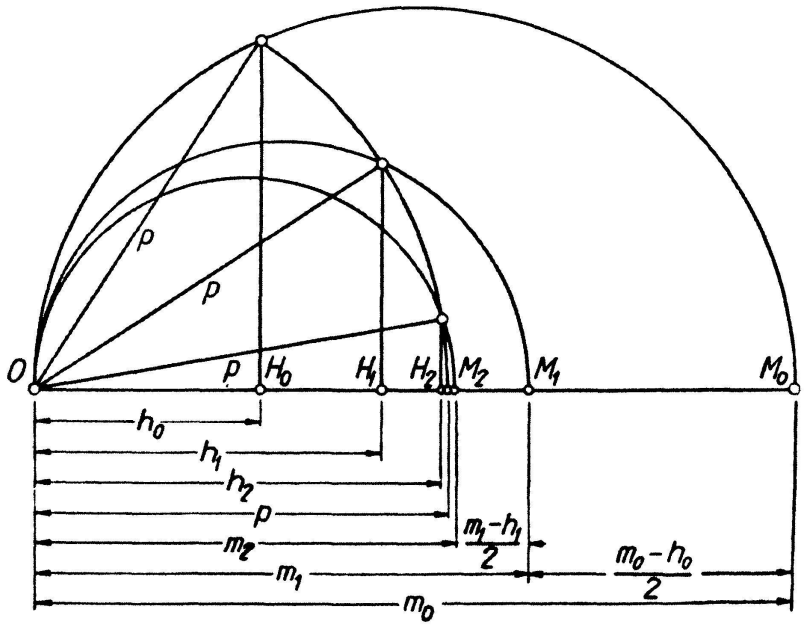
D'autre part:

3) $$m_1 - h_1 = \frac{m_0 + h_0}{2} - \frac{2 m_0 h_0}{m_0 + h_0} = \frac{m_0 - h_0}{2} \cdot \frac{m_0 - h_0}{m_0 + h_0} < \frac{m_0 - h_0}{2},$$

$$m_2 - h_2 < \frac{m_1 - h_1}{2} < \frac{m_0 - h_0}{2^2}, \ \ldots \text{ etc., d'où}$$

$$m_i - h_i < \frac{m_0 - h_0}{2^i}; \quad \lim_{i \to \infty} (m_i - h_i) = 0.$$

Les deux moyennes convergent vers p ou $\sqrt{A}$.



La figure ci-contre, dans laquelle m_0 et h_0 sont donnés, montre les inégalités précédentes et la convergence rapide vers p des deux moyennes, malgré la différence considérable entre m_0 et h_0.

---

[1]) Voir K. Kommerell: Das Grenzgebiet der elementaren und höheren Mathematik. Leipzig, 1936, p. 4.

Exemples: 1) $\sqrt{240} = \sqrt{16 \cdot 15}$; $m_0 = \frac{31}{2}$ et $h_0 = 240 \cdot \frac{2}{31}$.

m_2 et h_2 donnent $\sqrt{240}$ avec 14 chiffres exacts.

2) $\sqrt{257} \sim 16$. On pose $\sqrt{257} = \sqrt{16 \cdot \frac{257}{16}}$.

ALFRED PASCHE, Genève.

III. *Mensurieren und Generieren.* Gemäß den drei Rechenstufen bestehen zwischen zwei Zahlen a, b (die wir in dieser kurzen Mitteilung reell voraussetzen) drei Grundbeziehungen: Der Unterschied von a und b, das (gewöhnliche) Verhältnis von a zu b und das «logarithmische Verhältnis» ${}^b\log a = (\ln a) : (\ln b)$. Das Differenzieren nimmt, arithmetisch betrachtet, seinen Ausgang von der Unbestimmtheit des Verhältnisses $0:0$. Dem Differentialquotienten, dem Grenzwert des Verhältnisses zweier Unterschiede, die gegen Null streben, entspricht auf höherer Stufe der Grenzwert des logarithmischen Verhältnisses zweier gewöhnlicher Verhältnisse, die gegen Eins streben. Dem Begriff des Differentials dx, eines variablen, gegen Null strebenden Unterschiedes, entspricht der Begriff des variablen, gegen Eins strebenden Verhältnisses. Dem Unterschied $\Delta x = x_2 - x_1$ entspricht der Quotient $Qx = x_2 : x_1$; für $x_2 \to x_1$ schreibe ich analog dx im letzteren Falle qx und nenne diese gegen Eins strebende Variable ein *Mensural*. Das Differenzieren einer Funktion $y = f(x)$ (Differenzierbarkeit vorausgesetzt) stellt eine gewisse Verknüpfung der ersten zwei Rechenstufen dar. Zwischen der zweiten und dritten Rechenstufe gibt es eine entsprechende Verknüpfung, die ihren Ausgang von der Unbestimmtheit des logarithmischen Verhältnisses ${}^1\log 1$ nimmt. Sie sei *Mensurieren* genannt. Dem Differentialquotienten $y' = dy : dx$ einer Funktion $y = f(x)$ entspricht der «*Mensurallogarithmus*» $\lim_{Qx \to 1} {}^{Qx}\log Qy$, der mit $y^* = {}^{qx}\log qy$ bezeichnet sei. (Er hat eine einfache geometrische Bedeutung.)

Ähnlich ergibt sich an Stelle des Integrierens, d. h. der Bildung des Grenzwertes

$$\lim \sum f(x_i)\, \Delta x_i = \lim \sum \Delta y_i,$$

die Bildung des Grenzwertes

$$\lim \prod (Qx_i)^{f(x_i)} = \lim \prod Qy, \text{ kurz } \prod qy;$$

diese Operation sei *Generieren* genannt. Mensurieren und Generieren sind zwei Rechenoperationen, die sich als begrifflich vollkommen selbständige Bildungen aus dem konsequenten Aufbau der Arithmetik ergeben. Wie sich gewisse Regeln der Rechenoperationen dritter Stufe mit Hilfe von Operationen der unteren Stufen darstellen lassen, so kann man auch *formal* Mensurieren und Generieren mit Hilfe des Differenzierens und Integrierens durchführen, obschon es sich um selbständige Operationen handelt.

Im Folgenden seien einige Rechenregeln zusammengestellt, wobei $y = f(x)$, $u(x)$, $v(x)$ Funktionen darstellen, die zur Mensurierbarkeit gewisse Bedingungen zu erfüllen haben, und a, b, c Konstanten bedeuten.

$$y = x^a \to y^* = a. \qquad y = c\, f(x) \to y^* = f^*(x). \qquad y = \frac{1}{f(x)} \to y^* = -f^*(x).$$

$$y = a^x \to y^* = x \ln a. \qquad y = \ln x \to y^* = \frac{1}{\ln x}. \qquad y = e^{f(x)} \to y^* = x f'(x).$$

$$y = u(x) \cdot v(x) \to y^* = u^* + v^*. \qquad y = u(x) : v(x) \to y^* = u^* - v^*.$$

$$y^* = \frac{x}{y} \cdot y'. \qquad \prod_a^b qy = e^{\int_a^b \frac{y}{x}\, dx}.$$

Die bezüglich des Generierens ausgezeichnete Funktion $y = f(x)$, für welche $y = y^*$ wird, ist $y = -\frac{1}{\ln x}$.

Eine Anwendung. Neuere Versuchsergebnisse über den raumzeitlichen Verlauf des

organischen Wachstums, wie sie GASTON BACKMAN in seinem Werke «Wachstum und organische Zeit» (Verlag J. A. Barth, Leipzig 1943) dargestellt hat, zeigen, daß man hier zweckmäßig nicht nur den Maßstab der gewöhnlichen physikalischen Zeit anlegt, sondern daneben auch mit der «organischen Zeit» $z = \ln t$ rechnet. Ist $v = dx:dt$ die Wachstumsgeschwindigkeit der Größe x (z. B. Gewicht, Länge), gebildet mit der physikalischen Zeit t, so lautet das von BACKMAN aufgestellte und an vielen Beispielen bestätigte Wachstumsgesetz, ausgedrückt mit dem hier kurz entwickelten Begriff des Mensurierens: *Der Mensurallogarithmus der Wachstumsgeschwindigkeit zur organischen Zeit ist gleich einer negativen, für den betreffenden Organismus eigentümlichen Konstanten.* (Dabei sind die Einheiten der Geschwindigkeit und der organischen Zeit geeignet abzustimmen): $q^z \log qv = -c^2$. L. LOCHER-ERNST, Winterthur.

IV. *Etwas von höheren Fakultäten.* Es ist eine durchaus bekannte Tatsache, daß die Fakultäten

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \tag{1}$$

in fast allen Bezirken der Algebra und Analysis eine vorherrschende Rolle spielen. Dies ist im Hinblick auf die mannigfaltigen verwandtschaftlichen Beziehungen, die zwischen dem Baugesetz der Fakultäten einerseits und den verschiedenartigsten Grundoperationen der Arithmetik, Kombinatorik und Analysis andererseits bestehen, leicht zu verstehen. Im schroffen Gegensatz zu den gewöhnlichen Fakultäten treten von den höheren Fakultäten bereits die Doppelfakultäten

$$n!! = 1!\, 2!\, 3! \cdots n! \tag{2}$$

außerordentlich selten auf[1]). Während die gewöhnlichen Fakultäten beispielsweise in Reihenentwicklungen elementarer Funktionen als Baubestandteile der Koeffizienten, wie etwa im Falle der Exponentialreihe

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \tag{3}$$

überaus häufig auftreten, sind meines Wissens keine Reihen mit Doppelfakultäten, wie beispielsweise etwa

$$1 + \frac{x}{1!!} + \frac{x^2}{2!!} + \frac{x^3}{3!!} + \cdots, \tag{4}$$

näher bekannt geworden[2]).

Das seltene Vorkommen der höheren Fakultäten mag wohl der Grund dafür sein, daß man über diese Zahlen im allgemeinen recht wenig weiß.

Die mit den gewöhnlichen Fakultäten in Beziehung stehende Gammafunktion (von EULER) ist heute jedem Mathematiker bestens bekannt. Das nämliche darf wohl nicht behauptet werden von der mit den Doppelfakultäten in analoger Bindung stehenden Doppelgammafunktion (von ALEXEIEWSKY)[3]). Daß solche einzelne Theorien der Analysis der speziellen Funktionen immer mehr und mehr in Vergessenheit geraten, liegt u. a. auch daran, daß es durchaus der Zug der neuzeitlichen Mathematik ist, sich vom speziellen Fall zu lösen und sich mit denjenigen Disziplinen näher zu befassen, die die allgemeinsten Gesetze hervortreten lassen.

---

[1]) Beispielsweise führt die Berechnung gewisser Determinantenwerte gelegentlich auf Doppelfakultäten, so im Falle der speziellen (HANKELschen) Determinante

$$\left| \frac{1}{i+k} \right| = \left(\frac{1}{n!} \right)^2 \frac{[n!!]^4}{(2n)!!}; \qquad (i, k = 1, 2, \cdots n)$$

Vgl. auch G. PÓLYA und G. SZEGÖ, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Band II, Berlin 1925, Seite 98, Nr. 4.

[2]) Es ist ohne weiteres klar, daß (4) eine nicht elementare ganze transzendente Funktion darstellt.

[3]) Vgl. W. ALEXEIEWSKY, Über eine Classe von Functionen, die der Gammafunction analog sind. Berichte über die Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Band *46*, 1894, Seite 268 ff. E. W. BARNES, The theory of the *G*-Function. Quarterly-Journal, Vol XXXI, 1900. Eine kurze Notiz findet man ferner in E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON, A course of modern analysis, Cambridge 1927, Seite 264.

Aus dem umfassenden Wissensgut über die Doppelfakultäten möchte ich an dieser Stelle nur die asymptotische Formel herausgreifen, die der bekannten Formel von *Stirling*[1])

$$n! = \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{\Theta}{12n}} \qquad (0<\Theta<1) \tag{5}$$

für die gewöhnlichen Fakultäten an die Seite gestellt werden kann, nämlich

$$n!! = \left(\sqrt{2\pi}\right)^{n+1} n^{\frac{n^2}{2}+n+\frac{5}{12}} e^{-\frac{3n^2}{4}-n-x+\frac{\Theta}{12n}}. \qquad (0<\Theta<1) \tag{6}$$

Die hier auftretende (GLAISHER-KINKELINsche) Konstante[2]) hat den Wert

$$x = 0{,}1654\ldots \tag{7}$$

H. HADWIGER, Bern.

Aufgaben

Berichtigung. In Aufgabe 17 (Heft 3, S. 54) muß es heißen: «Trouver le lieu géométrique des points de contact *de* toutes les tangentes à la sphère qui coupent *a* et *b*.»

Mitteilung betreffend Lösungen. Knapp gefaßte Lösungen, bei einfachen Aufgaben nur kurze Hinweise, werden von Heft 6 an erscheinen. Bei dieser Gelegenheit mache ich auf die Aufgaben 12, 13 und 14 aufmerksam, für welche noch keine Lösungen eingegangen sind.

L. LOCHER.

Literaturüberschau

K. DÄNDLIKER: *Aufgabensammlung der Darstellenden Geometrie.* Orell Füßli-Verlag, Zürich. Kart. Fr. 3.30.

Mit der vorliegenden Aufgabensammlung nähert sich das Mathematische Unterrichtswerk für höhere Mittelschulen, das der Verein Schweizerischer Mathematiklehrer herausgibt, seinem Abschluß. Im Jahre 1928 begonnen, wird es mit seinen mehr als 20 Bänden in einem Zeitpunkt und unter Umständen vollendet sein, da die Kollegen mancher anderen Fachrichtung sich eben erst anschicken, aus der Not eine Tugend zu machen.

Für dieses Unterrichtswerk hat K. Dändliker seine 1924 erstmals erschienene Aufgabensammlung der Darstellenden Geometrie vollständig umgearbeitet, wesentlich erweitert und dadurch dem zugehörigen Leitfaden von H. Flückiger angepaßt. Beiden Verfassern hat das Schicksal verwehrt, den Widerhall ihrer Arbeiten zu erleben.

In Übereinstimmung mit dem Leitfaden ist der erste Teil der Aufgabensammlung dem Eintafelverfahren gewidmet, wenn auch offenbar nur in propädeutischer Absicht; denn mit Ausnahme von vier Kugeln und einer Pyramide sind in den ersten 250 Aufgaben keine Körper darzustellen. Dafür finden Übungen zur ebenen Affinität und Dreikantkonstruktionen hier ihren Platz.

Der zweite und umfangreichste Teil enthält Aufgaben zum Grund- und Aufrißverfahren. In systematischer Anordnung folgen sich die Beispiele zu den Grundaufgaben; dann sind Vielflache, runde Strahlenflächen und schließlich Kugeln darzustellen, durch Ebenen oder unter sich zu schneiden. Schattenkonstruktionen sind über das ganze Buch verteilt, und die Drehungen werden im Kapitel «Normalebene zu einer Geraden» untergebracht.

---

[1]) Es gibt naturgemäß für diese klassische, von J. STIRLING vor mehr als 200 Jahren (Methodus differentialis, London 1730, Seite 135) aufgestellte Formel sehr viele verschiedene Beweise. Eine sich auch für den Mittelschulunterricht eignende Ableitung veröffentlichte kürzlich E. TROST, Eine anschauliche Herleitung der Stirlingschen Formel, Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr. Andreas Speiser, Zürich 1945, Seite 138—140.

[2]) Herr W. GRUNER (Zürich) hat im Jahre 1937 im Mathematischen Seminar der Universität Bern einige nicht veröffentlichte Untersuchungen über diese Konstante durchgeführt.