Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 75 (2020)
Heft: 1

Buchbesprechung: Rezensionen

Elem. Math. 75 (2020) 44 – 44
0013-6018/20/010044-1
DOI 10.4171/EM/403

Elemente der Mathematik

Rezensionen

Peter Frankl, Norihide Tokushige: Extremal Problems For Finite Sets, 224 Seiten, 52.00$ (Softcover). American Mathematical Society (2018), 978-1-4704-4039-8.

Endliche Mengen gehören zu den einfachsten Objekten der Mathematik. Sie führen aber rasch auf interessante Einsichten, wie beispielsweise der klassische Satz über Antiketten zeigt, den Emanuel Sperner 1928 bewiesen hat.

Etwas im Gegensatz zum Satz von Sperner nimmt sich die folgende Behauptung aus. Wenn eine Teilmenge $\mathcal{F}$ von $\mathcal{P}_n$, der Potenzmenge von $\{1, \ldots, n\}$, die Eigenschaft hat, dass für alle $F, G \in \mathcal{F}$ der Durchschnitt niemals leer ist, dann ist die Kardinalität von $\mathcal{F}$ stets kleiner oder gleich 2^{n-1}. Dies ist der einfachere Teil eines Satzes, den Erdös, Ko und Rado in einer berühmten Arbeit 1961 bewiesen haben. Der Leser mag die Aussage selbst verifizieren (Hinweis: Man bezeichne mit $\mathcal{F}^c$ die Menge aller Komplemente F^c mit $F \in \mathcal{F}$ und stelle fest, dass $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}^c$ disjunkte Teilmengen von $\mathcal{P}_n$ der gleichen Kardinalität sind).

Mit diesen beiden Sätzen beginnt das Buch von T. Frankl und N. Tokushige, die zu den herausragenden Vertretern des Gebiets gehören, und schon ist man mittendrin im Thema. Der Leser wird im ersten Teil an die klassischen Ergebnisse dieses Gebiets herangeführt – mit teilweise neuen Beweisen – während die Kapitel 16–32 den fortgeschritteneren Entwicklungen gewidmet sind. Die Beweise sind vollständig, soweit der Rezensent sieht; in den Text eingestreut finden sich zahlreiche Übungen von unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad. Die ausgewählten Themen werden sorgfältig eingeführt; an einigen Stellen werden Kenntnisse in Graphentheorie vorausgesetzt. Natürlich kommen in diesem Buch auch die auf Jakob Steiner und andere zurückgehenden $S(t, k, n)$-Systeme zur Sprache. Kapitel 22 behandelt Anwendungen in der diskreten Geometrie, beispielsweise das Problem Sylvesters über nicht-kollineare Punkte in der Ebene. In Kapitel 26 gibt es elegante Beweisführungen mithilfe multilinearer Algebra. Besonders reizvoll ist, dass überall im Text ungelöste Fragen angesprochen werden. Diesem Thema ist auch das letzte Kapitel gewidmet. Im zweitletzten Kapitel werden die dramatischen Entwicklungen des Jahres 2016 im Umfeld des *Capset-Problems* zusammengefasst und die Lösung präsentiert, die T. Tao in seinem Blog vorschlägt. Beim Capset-Problem geht es darum, die maximale Kardinalität einer Teilmenge C von $\mathbb{F}_3^n$ abzuschätzen, welche die folgende Eigenschaft besitzt: Für alle $a, x \in \mathbb{F}_3^n$ mit $a \neq 0$ sind die drei paarweise verschiedenen Vektoren $x, x + a$ und $x + 2a$ nicht gleichzeitig in C enthalten (d.h. C besitzt keine arithmetischen Folgen der Länge 3). –Trivialerweise ist card $C < 3^n$. Aus den erwähnten Untersuchungen geht hervor, dass es aber bessere Abschätzungen gibt.

Es macht Spass, in diesem Buch zu lesen, auch deshalb, weil sich die Autoren die Mühe machen, die Historie des Gebietes etwas aufzuarbeiten (die vielen Referenzen auf Originalarbeiten zeugen davon). Freilich sind einzelne Aspekte nicht gänzlich elementar, und es braucht zuweilen die Bereitschaft, sich ein wenig auf technischere Abschnitte einzulassen.

Martin Jakob, Olten

Typesetting & Layout: *mathScreen online, CH-4123 Allschwil*