Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 75 (2020)

Heft: 1

Rubrik: Aufgaben

Elem. Math. 75 (2020) 37 – 43
0013-6018/20/010037-7
DOI 10.4171/EM/402

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. August 2020 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1395: In der Ebene seien drei Strecken gegeben. Gibt es Punkte, von denen aus alle drei Stecken unter demselben Winkel gesehen werden kann?

a) Welcher Bedingung muss ein gesuchter Punkt genügen?

b) Numerisches Beispiel für die Strecken P_1P_2, P_3P_4, P_5P_6 mit $P_1(-1, 0)$, $P_2(1, 0)$, $P_3(1, 2)$, $P_4(0, 3)$, $P_5(2, -1)$, $P_6(3, 2)$.

Walter Burgherr, Rothenburg, CH

Aufgabe 1396: Seien a, b, c positive reelle Zahlen, die der Bedingung $a + b + c = \sqrt{abc}$ genügen. Man zeige, dass für diese Zahlen die folgende Ungleichung gilt

$$\sqrt{a(b+c)} + \sqrt{b(c+a)} + \sqrt{c(a+b)} > 36.$$

Šefket Arslanagić (Sarajevo, BIH)

Aufgabe 1397 (Die einfache dritte Aufgabe): Sei $\lfloor x \rfloor$ die grösste ganze Zahl kleiner gleich x und $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Man zeige für $n, k \in \mathbb{N}$ die Identität

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\left(\lfloor x + \frac{i-1}{n} \rfloor\right)^k} = \frac{(n - \lfloor n\{x\} \rfloor)(\lfloor x \rfloor + 1)^k + \lfloor n\{x\} \rfloor \lfloor x \rfloor^k}{\lfloor x \rfloor^k (\lfloor x \rfloor + 1)^k}$$

für alle reellen Zahlen x, für die alle vorkommenden Nenner ungleich Null sind.

Mihály Bencze, Brașov, RO

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 2019

Aufgabe 1383.

a) Man zeige, dass für $\alpha \in (0,1]$ die in $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ holomorphe Funktion $f(z) = (1-z)^\alpha$ Hölder–Lipschitz stetig ist zur Ordnung α, d.h.

$$\sigma_\alpha = \sup_{\substack{z,w \in \mathbb{D} \\ z \neq w}} \frac{|(1-z)^\alpha - (1-w)^\alpha|}{|z-w|^\alpha} < \infty.$$

Hierbei ist, wie üblich, $(1-z)^\alpha = \exp(\alpha \log(1-z))$, wobei der Hauptzweig des Logarithmus in der rechten Halbebene genommen wird.

b) Man bestimme σ_α explizit.

Raymond Mortini, Metz, F und Rudolf Rupp, Nürnberg, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Folgende 8 Leser haben Beiträge eingesandt: Hans Brandstetter (Wien, A), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die Aufgabe kann so umformuliert werden, dass man im Wesentlichen ein Extremalproblem auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ lösen muss. Wir folgen der Lösung von *Henri Carnal*, der das ganze anschaulich geometrisch interpretiert.

Sei $z_1 = 1-z$ und $w_1 = 1-w$. Der Ausdruck

$$\frac{|z_1^\alpha - w_1^\alpha|}{|z_1 - w_1|^\alpha}$$

ändert sich nicht, wenn man das Dreieck $w_1 0 z_1$ der komplexen Zahlenebene (siehe Figur 1) durch das ähnliche Dreieck $1\,0\,v$ mit $v = z_1/w_1 = re^{it}$ ersetzt, denn Zähler und Nenner werden durch $|w_1|^\alpha$ dividiert. Aus Symmetriegründen (vertauschen von z und w, komplexe Konjugation) beschränkt man sich auf den Fall $0 < r \leq 1$, $0 \leq t < \pi$. Man setzt $p = |v-1|$ und $q = |v^\alpha - 1|$ und studiert den Quotienten q/p^α bzw. die Funktion

$$f(t,r) = \log\left(\frac{q}{p^\alpha}\right) = \tfrac{1}{2}\Big(\log(r^{2\alpha} - 2r^\alpha\cos(\alpha t) + 1) - \alpha\log(r^2 - 2r\cos(t) + 1)\Big),$$

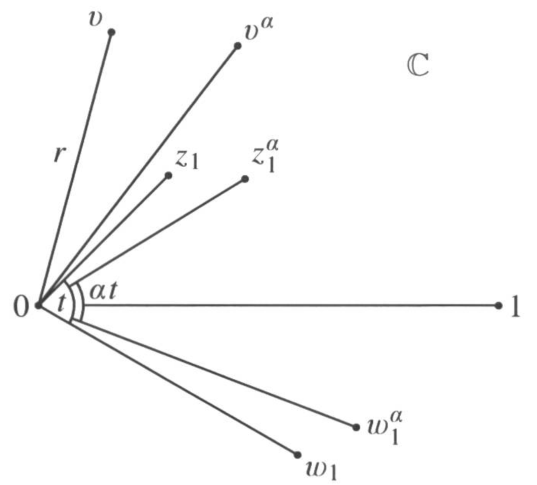
die man mithilfe des Cosinussatzes in diese Form bringen kann.

a) Sei B das Gebiet $t \leq \frac{\pi}{3}$ und $r \geq r_0$ mit $r_0^\alpha = 2r_0$ (siehe Figur 2). Da gilt zuerst $p \leq 1$, also $p \leq p^\alpha$ und (wie für alle $t \in [0,\pi]$) $1 - \cos(\alpha t) \leq 1 - \cos(t)$. Dann auch $r^\alpha \leq 2r$ und (wie für alle $r \in [0,1]$) $0 \leq 1 - r^\alpha \leq 1 - r$. Man hat

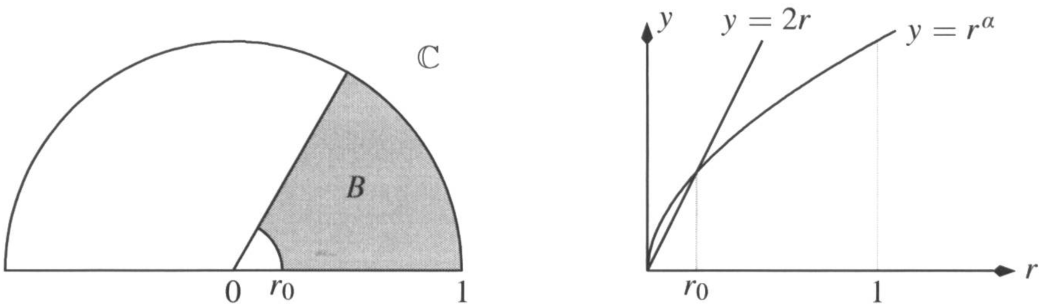
$$p^2 = r^2 - 2r\cos(t) + 1 = (1-r)^2 + 2r(1-\cos(t)),$$

sowie

$$q^2 = (1-r^\alpha)^2 + 2r^\alpha(1-\cos(\alpha t)) \leq (1-r)^2 + 4r(1-\cos(t)) \leq 2p^2,$$



Figur 1



Figur 2

also $q/p^\alpha \leq q/p \leq \sqrt{2}$. Ausserhalb von B ist $p \geq \min\{1 - r_0, \sqrt{3}/2\}$, $q \leq 2$, somit auch q/p^α beschränkt.

b) Besitzt f ein Extremum für $0 < r < 1$, $0 < t < \pi$, so gilt dort $\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial t} = 0$.

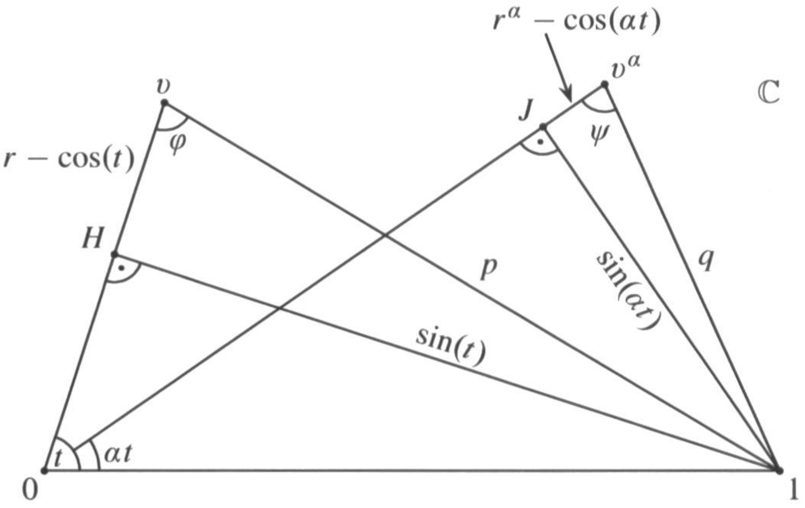
$$\frac{\partial f}{\partial r} = \alpha \left(\frac{r^{\alpha-1}(r^\alpha - \cos(\alpha t))}{q^2} - \frac{r - \cos(t)}{p^2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{r^\alpha(r^\alpha - \cos(\alpha t))}{r(r - \cos(t))} = \frac{q^2}{p^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \alpha \left(\frac{r^\alpha \sin(\alpha t)}{q^2} - \frac{r \sin(t)}{p^2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{r^\alpha \sin(\alpha t)}{r \sin(t)} = \frac{q^2}{p^2} \quad (2)$$

Daher

$$\frac{r^\alpha - \cos(\alpha t)}{r - \cos(t)} = \frac{\sin(\alpha t)}{\sin(t)} = \lambda$$

und daraus folgt, dass die Dreiecke $1Hv$ und $1Jv^\alpha$ ähnlich sind (siehe Figur 3) und insbesondere $\varphi = \psi$. Somit gilt $q/p = \lambda$ und aus (2) $r^\alpha/r = \lambda$. Das bedeutet, dass die Dreiecke $0v1$ und $0v^\alpha 1$ ähnlich sind, was wegen $t \neq \alpha t$ unmöglich ist (der Fall $\alpha = 1$ ist trivial). Deshalb liegen die Extrema am Rande des Halbkreises.



Figur 3

1. Fall: $t = 0$, $p = 1 - r$, $q = 1 - r^\alpha$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \alpha\left(\frac{1}{1-r} - \frac{r^{\alpha-1}}{1-r^\alpha}\right) = \alpha\frac{1-r^{\alpha-1}}{(1-r)(1-r^\alpha)} < 0.$$

Der Wert von q/p^α fällt also monoton von 1 bis 0, da

$$\frac{q}{p^\alpha} = \frac{1-r^\alpha}{1-r}\cdot(1-r)^{1-\alpha} \overset{r\to 1^-}{\longrightarrow} \alpha\cdot 0 = 0.$$

2. Fall: $t = \pi$. Für ein Extremum braucht man $\frac{\partial f}{\partial r} = 0$, also nach (1) (mit $p = 1 + r = 1 - \cos(\pi)$):

$$r^{\alpha-1}(r^\alpha - \cos(\alpha\pi))(1+r) = r^{2\alpha} - 2r^\alpha\cos(\alpha\pi) + 1$$

oder

$$\cos(\alpha\pi)(r^{\alpha-1} - r^\alpha) = r^{2\alpha-1} - 1.$$

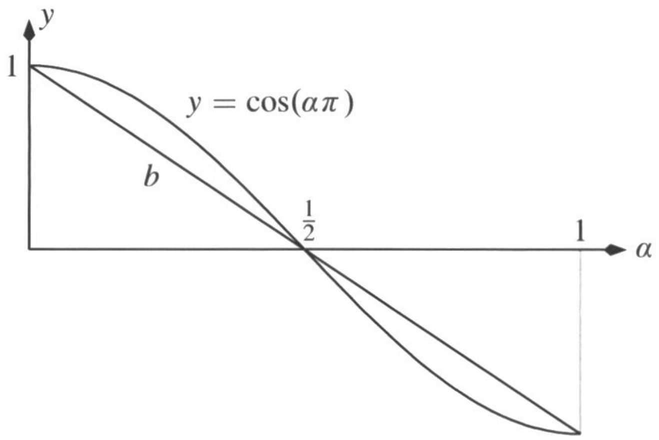
Man dividiert durch $r^{\alpha-\frac{1}{2}}$ und erhält

$$\cos(\alpha\pi)(r^{-1/2} - r^{1/2}) = r^{\alpha-1/2} - r^{-(\alpha-1)/2}.$$

Man setzt $r = e^{-2x}$ $(x \geq 0)$, $b = 1 - 2\alpha$ und erhält

$$\cos(\alpha\pi) = \frac{\sinh(bx)}{\sinh(x)} < b \quad (0 < b < 1). \tag{3}$$

Für $\alpha < \frac{1}{2}$ (also $b > 0$) ist aber $b < \cos(\alpha\pi)$ (siehe Figur 4), daher hat die Gleichung (3) keine Lösung. Für $\alpha > \frac{1}{2}$ argumentiert man ähnlich (mit Minuszeichen auf beiden Seiten von (3)). Für $\alpha = \frac{1}{2}$, d.h. $\cos(\alpha\pi) = 0$, ist $q^2 = 1 + r = p$, d.h. $q/p^\alpha = 1$.



Figur 4

3. Fall: $r = 1$, $p = 2\sin(\frac{t}{2})$, $q = 2\sin(\frac{\alpha t}{2})$,

$$f(t,1) = (1-\alpha)\log(2) + \log(\sin(\tfrac{\alpha t}{2})) - \alpha\log(\sin(\tfrac{t}{2})),$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\alpha}{2}\left(\cot(\tfrac{\alpha t}{2}) - \cot(\tfrac{t}{2})\right) > 0.$$

Das heisst, dass das Maximum in $t = \pi$ erreicht wird mit

$$\frac{q}{p^\alpha} = 2^{1-\alpha}\sin(\tfrac{\alpha\pi}{2}) = \varphi(\alpha),$$

z.B. $\varphi(\frac{1}{2}) = 2^{1/2}\sin(\frac{\pi}{4}) = 1$, $\varphi(1) = 1$. Weiter ist

$$\frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = -\log(2) + \tfrac{\pi}{2}\cot(\tfrac{\alpha\pi}{2}),$$

also erreicht φ das Maximum in $\alpha_0 = \frac{2}{\pi}\arctan(\frac{\pi}{2\log(2)}) \approx 0.735$ mit $\varphi'(\alpha_0) = 0$, denn φ wächst von 0 bis α_0, ist also für $\alpha < \frac{1}{2}$ kleiner als 1, dafür zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 grösser, mit Maximum $\varphi(\alpha_0) \approx 1.099$.

Fazit: Es ist $\sigma_\alpha = 1$ für $\alpha \le \frac{1}{2}$ und $\sigma_\alpha = 2^{1-\alpha}\sin(\frac{\alpha\pi}{2})$ für $\frac{1}{2} \le \alpha \le 1$.

Aufgabe 1384. Seien x, y, z positive reelle Zahlen, welche der Bedingung $x + y + z = 3$ genügen. Man beweise für $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\frac{(x+y)^{2n}}{xy(9-xy)} + \frac{(y+z)^{2n}}{yz(9-yz)} + \frac{(z+x)^{2n}}{zx(9-zx)} \ge 3 \cdot 2^{2n-3}$$

Oleh Faynshteyn, Leipzig, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind von folgenden 12 Lesern Lösungen eingetroffen: Moritz Adelmeyer (Zürich, CH), Šefket Arslanagić (Sarajevo, BIH), Hans

Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Péter Ivády (Budapest, H), Walther Janous (Innsbruck, A), Ioannis D. Sfikas (Athen, GR), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Da recht offensichtlich ist, für welche Werte von x, y und z der linke Teil der Ungleichung minimal ist, kann man die Aufgabe mit analytischen Mitteln lösen. Wir folgen den Ausführungen von *Henri Carnal*, der die Behauptung direkt zeigt.

Man hält z fest, damit auch $x + y = 3 - z$ und setzt $s = \frac{3-z}{2}$, und wegen $4xy < (x + y)^2$ folgt $xy \leq s^2$. Die Funktion $t \mapsto t(9 - t)$ ist für $0 \leq t \leq \frac{9}{2}$ monoton wachsend, daher ist der Nenner im ersten Summanden kleiner als $s^2(9 - s^2)$ und der erste Summand wird minimal für $x = y = s$.

Die Funktion

$$f_z(x) = \frac{(x + z)^{2n}}{xz(9 - xz)} = \frac{(x + z)^{2n}}{9} \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{(xz)^k}{9^{k+1}}$$

ist eine Potenzreihe in x mit positiven Koeffizienten, somit konvex für $x > 0$ und es gilt $f_z(x) + f_z(y) \geq 2f_z(s)$ mit Gleichheit für $x = y = s$. Da man die Rollen von x und y vertauschen darf, erreicht die Summe ihr Minimum für $x = y = z = 1$:

$$3 \cdot \frac{2^{2n}}{8} = 3 \cdot 2^{2n-3}.$$

Aufgabe 1385 (Die einfache dritte Aufgabe). Die Felder eines $2 \times n$-Gitterrechtecks R_n sind so mit Zahlen aus der Menge $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ zu belegen, dass zwei horizontal oder vertikal benachbarte Zahlen nicht beide ungerade sind. Man bestimme die Anzahl z_n solcher Belegungen.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 9 Lösungen von folgenden Lesern eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Hansruedi Widmer (Baden, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Alles Leser lösen das Problem rekursiv mithilfe einer Fallunterscheidung. Mit Standardmethoden kommt man dann sehr schnell zu expliziten Formeln. Wir folgen den Ausführungen von *Hansruedi Widmer*.

Es sei x_n die Anzahl Belegungen, bei denen das letzte 2×1-Rechteck mit zwei geraden Zahlen belegt ist, und y_n die Anzahl Belegungen, bei denen das letzte Rechteck genau eine ungerade Zahl enthält. Es ist dann $z_n = x_n + y_n$, wobei $x_1 = 9$ und $y_1 = 12$.

Das Rechteck R_n entsteht, indem man an das letzte 2×1-Rechteck von R_{n-1} eines dieser 21 2×1-Rechtecke anfügt, und es gilt

$$\begin{aligned} x_n &= 9x_{n-1} + 9y_{n-1} \\ y_n &= 12x_{n-1} + 6y_{n-1}. \end{aligned}$$

Bei der Bestimmung von y_n muss man beachten, dass an eine y_{n-1}-Belegung nur die Hälfte der 2×1-Rechtecke, die eine ungerade Zahl enthalten, angefügt werden können, damit die Bedingung über das Benachbartsein ungerader Zahlen erfüllt ist.

Die oben stehende Rekursion lässt sich in Matrixschreibweise zusammenfassen als

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix},$$

und man hat somit

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Mit Standardmethoden der linearen Algebra ergibt sich

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18^{n-1} & 0 \\ 0 & (-3)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Das Auswerten des Matrixprodukts liefert schlussendlich

$$z_n = x_n + y_n = 3^n \cdot \frac{8 \cdot 6^n - (-1)^n}{7}.$$