Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 75 (2020)
Heft: 4

Buchbesprechung: Rezensionen

Elem. Math. 75 (2020) 180 – 182
0013-6018/20/040180-3
DOI 10.4171/EM/421

Elemente der Mathematik

Rezensionen

J.-F. Emmenegger, D.L. Chable, H.A. Nour Eldin, H. Knolle: Sraffa and Leontief Revisited. Mathematical Methods and Models of a Circular Economy. 529 Seiten, CHF 160.00. De Gruyter, 2020; ISBN 978-3-11-063042-8.

Seit nahezu 250 Jahren folgt die Wirtschaftswissenschaft Adam Smith' Paradigma der unsichtbaren Hand, der Idee nämlich, dass der moderne Kapitalismus individuellen Egoismus auf scheinbar paradoxe Weise in Gemeinwohl verwandle. Dieses Paradigma bildete die Grundlage der klassischen Periode der Ökonomik – vertreten durch Smith, Ricardo und andere –, die schliesslich gegen Ende des 19. Jahrhunderts in die Grenznutzenlehre einmündete, welche das mikroökonomische Verhalten der Konsumenten abzubilden trachtete. Die Vorstellung des *Homo oeconomicus* als eines gänzlich rational handelnden Nutzenmaximierers wurde zwar in den letzten Jahrzehnten durch die Erkenntnisse der Verhaltensökonomik aufgeweicht, aber immer noch steht das Handeln des Individuums im Zentrum der Nationalökonomie.

Es gibt aber auch Theoretiker, die sich dem Mainstream widersetzen und sich auf die ursprüngliche Vorstellung stützen, welche die Wirtschaft primär als einen Kreislaufprozess auffasst. Eine besonders schillernde Figur unter diesen Theoretikern war der Italiener Piero Sraffa, ein schüchterner, aber hochgebildeter Denker, den auch die Philosophiegeschichte erwähnt, weil er Wittgenstein dazu bewog, seine Positionen grundsätzlich neu zu denken. Seine wirtschaftstheoretischen Vorstellungen, die unter anderem die individualistischen Vorstellungen der Preisbildung durch eine Kreislauftheorie ersetzen, legte Sraffa in seinem Buch *Warenproduktion mittels Waren* (1960) nieder. Obwohl dieses Buch durchaus einflussreich war, litt seine Verständlichkeit unter der Tatsache, dass Sraffa seine Theorie nicht primär in der Sprache der Mathematik, sondern eher wortbasiert beschrieb; wobei erwähnt sei, dass Straffas Buch zahlreiche numerische Beispiele enthält, die offenbar Besicovitch für ihn durchgerechnet hat. Seither haben sich diverse Wissenschaftler bemüht, Sraffas Theorie mathematisch zu formulieren. Es ist das grosse Verdienst der vier Autoren von *Sraffa and Leontief Revisited*, eine monumentale Synthese dieser Bemühungen vorzulegen.

Die Monographie ist primär für Fachleute geschrieben und bedient sich z.B. konsequent der modernen Matrizenalgebra. In einem ausführlichen Anhang wird die Matrixtheorie dargestellt, insbesondere auch das Frobenius-Theorem, dem in der Monographie eine besondere Bedeutung zuteil wird. Dennoch setzt die Lektüre des Werks eine gewisse mathematische Bildung voraus, es bewegt sich auf Master-Niveau. Das Buch beginnt mit einem langen Kapitel über das Input-Output-Modell des Nobelpreisträgers Wassily Leontief, das heutigen Wirtschaftsstudierenden in seiner einfachsten Form bekannt ist, weil es in den Vorlesungen zur Wirtschaftsmathematik oft als einführendes Beispiel für den Gebrauch der Matrizen verwendet wird. Ab dem zweiten Kapitel beginnt dann eine enorm detaillierte Darstellung des Preismodells von Sraffa. Die algebraische Struktur desselben, welche auf den vier Freiheitsgraden Objekt, Preis, Quantität und Wert beruht, ist zu komplex, um hier dargestellt zu werden. Es sei nur erwähnt, dass die Monographie eine Reihe von Resultaten enthält, die bislang nicht in der Literatur vorhanden waren. So wird beispielsweise das Sraffasche Preismodell mit einer Input-Output-Tabelle zu einem dynamischen Modell, das einer Randwertaufgabe entspricht, umformuliert.

Obwohl der Text zahlreiche durchgerechnete Beispiele und graphische Darstellungen enthält, ist es schwierig, während der Lektüre nicht den Faden zu verlieren. Ich hoffe, dass die Autoren noch eine Kurzfassung des Buches in Form eines – allenfalls auch etwas populärer gefassten – Übersichtsartikels publizieren werden. Der kreislaufbasierte Ansatz stellt ohne Zweifel eine wichtige Alternative zum neoklassischen Zugang der Makroökonomik dar, wie er heute fast ausschliesslich an den Universitäten gelehrt wird. Die Neoklassik beschreibt den Produktionsprozess in unzulässig vereinfachender Weise mit Hilfe der sog. Produktionsfunktion $Y = f(L, K)$, welche sämtliche Wirtschaftsprodukte in eine einzige Grösse Y aggregiert und diese aus den zwei ebenfalls aggregierten Grössen Arbeit (L) und Kapital (K) erklärt. (Neuere Wachstumstheorien fügen weitere Variablen hinzu, aber das Prinzip bleibt das gleiche.) Diese Auffassung wird, wie die Autoren deutlich machen, der ungeheuren Komplexität des Wirtschaftsprozesses in keiner Weise gerecht, nur eine kreislaufbasierte Darstellung kann diese Komplexität abbilden. Die zentrale Idee der kreislaufbasierten Ökonomik ist es, alle Güterströme einer Gesellschaft in einem Modell zu erfassen, was einen sehr präzisen Einblick in die Marktstrukturen und die Verflechtungen der Warenproduktion erlaubt. Auch stellt der neoklassische Ansatz die zyklische Struktur der ökonomischen Abläufe, ihr periodisches Auf und Ab, nicht in Rechnung, während Sraffas Theorie genau dieses leistet.

Sraffas Texte sind von vielen Ökonomen nicht verstanden und vielleicht auch aufgrund ihrer Nähe zu Marx verdrängt worden – in der Tat hatte Sraffa enge Kontakte zu einigen marxistischen Denkern –, doch die Monographie *Sraffa und Leontief Revisited* zeigt eindrucksvoll, dass Sraffas Theoriengebäude fern aller Ideologie auf rein mathematischer Basis aufbaut werden kann. Die Kreislaufökonomie erhält gegenwärtig durch die im Aufbau begriffenen Rezyklierungstechnologien im Rahmen der grünen Wirtschaft neuen Auftrieb. Es ist zu hoffen, dass die Kreislaufökonomie in der modernen Lehre und Forschung wieder die Aufmerksamkeit finden wird, die ihr zusteht. Diese Monographie leistet einen wichtigen Beitrag dazu: sie schliesst Lücken und liefert neue Anregungen.

Chr. Leuenberger, Fribourg

Ulrich Daepp, Pamela Gorkin, Andrew Shaffer, and Karl Voss: Finding Ellipses: What Blaschke Products, Poncelet's Theorem, and the Numerical Range Know about Each Other. 268pp. Hardcover 63.00 USD, AMS/MAA Press, The Carus Mathematical Monographs. ISBN: 978-1-4704-4383-2

Mathematics is more fun when multiple sub-fields come together neatly. Using algebra to solve a geometry problem or invoking complex function theory to answer a number theory problem fascinates all practitioners of mathematics. Putting such ideas together in a book accessible to undergraduate students is another delight. Finding Ellipses by Daepp, Gorkin, Shaffer, and Voss exactly realizes this dream. The book brings together complex analysis, projective geometry, and linear algebra to present a coherent theory. Both complex analysis and linear algebra are standard courses in the undergraduate curriculum. Projective geometry is not such a common theme among college students, but the reader can quickly learn the part that is relevant to the discussion in the book. As the title indicates, the book revolves around ellipses and tells three stories on how to find ellipses in complex analysis, projective geometry, and linear algebra.

In complex analysis, ellipses naturally come into the picture via Blaschke products. For a real number θ and points $a_1, \dots, a_n$ in the open unit disk $\mathbb{D}$, a finite Blaschke product of degree n is a function $B(z)$ of the form

$$B(z) = e^{i\theta} \prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j} z}.$$

In other words, it is a product of the automorphisms of $\mathbb{D}$ up to a rotation factor. There is a rich literature on Blaschke products and the reader can find many references in the book. In addition to the standard texts on this topic, the book offers a geometric way of understanding some of these functions by computer visualisations. This single chapter can be a great addition to any complex analysis course.

The ellipses are found in this context when one looks at degree 3 Blaschke products. We illustrate this relation by an example. For $a, b \in \mathbb{D}$, let's look at the following function

$$P(z) = z \left(\frac{z - a}{1 - \overline{a} z} \right) \left(\frac{z - b}{1 - \overline{b} z} \right),$$

which is a degree-3 Blaschke product with zeros at $0, a$, and b. Let z_1, z_2, and z_3 be points on the unit circle such that $P(z_i) = \vartheta$ for some ϑ with $|\vartheta| = 1$. Then the edges of the triangle formed by these three vertices z_1, z_2, and z_3 are tangent to the ellipse given by the equation

$$|z - a| + |z - b| = |1 - \overline{a} b|. \tag{1}$$

Furthermore, each point on the ellipse is a point of tangency with a line segment that joins two points on the circle that are identified by P. The reader can see this statement in action by utilizing the computer visualization tools (in form of applets) created by the authors.

In the next part of the book, the authors present a quick introduction to projective geometry. Then they present Poncelet's theorem that explains conics inscribed in polygons that are themselves inscribed in conics. In the Blaschke product connection, we have already mentioned such a phenomena. In particular, two conics: the unit circle and the ellipse in (1) are connected via a family of triangles that came out of solving the equation $P(z) = \lambda$, for $|\lambda| = 1$. First learning about Poncelet's theorem and then seeing the action of it in the context of Blascke products is indeed a capstone in any undergraduate student's education.

Finally, ellipses reveal themselves in the context of matrices. Let A be an $n \times n$ matrix. Many students learn how to compute the eigenvalues of A (at least by hand when n is small enough). However, it is less common to know about the numerical range of A. The numerical range of A, denoted by $W(A)$ is a set larger than the spectrum of A and it is given by

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle \ : \ x \in \mathbb{C}^n, ||x|| = 1\}.$$

It is not easy to come up with a geometric characterization of the set $W(A)$ for large values of n. The book provides a gentle introduction to this concept and provides multiple references to explore further. As in the case of Blaschke products, this part of the book can be easily adapted to a linear algebra course.

What makes the numerical range relevant in this context is the fact that when $n = 2$ the numerical range of A is an ellipse (where degenerate cases are also considered as ellipses). Indeed, if A has distinct eigenvalues a and b then $W(A)$ is an ellipse with foci at a and b and minor axis of length $\left(\mathrm{tr}(A^*A) - |a|^2 - |b|^2\right)^{1/2}$. Similar characterizations for larger matrices is an active research area.

Now, after finding the ellipses in three different contexts, the book investigates the relation between Blaschke products, Poncelet's theorem, and numerical ranges of 2×2 matrices. The book not only answers what these concepts "know" about each other but also takes a step forward and presents an accessible account of the current research direction in the area. This latter part of the book is interesting for readers who are ready to learn more on current research.

A pleasant feature of the book are the computational pieces scattered throughout the text in connection with the applets mentioned earlier. They are downloadable from the website indicated in the book. Their use makes the book even more enjoyable as they help the reader to build the intuition around abstract concepts. They support the geometric understanding of the material and provide an opportunity to test claims.

The book consists of tree parts that cover complex function theory, projective geometry, and matrices. The material is presented in a self-contained way with ample references. Each part can be a useful resource for a course covering the respective topics. However, the main purpose of the book is to support so–called capstone experiences.

Many mathematics departments require a capstone (or research or senior thesis) experience for mathematics majors. For this, instructors usually cobble together many resources to present reading materials to undergraduate students.

The book under review is a rare find in this area. As it brings together important ideas for the undergraduate curriculum, it is a perfect fit for a capstone course. The reviewer is considering to design a capstone course based on the book's material to be taught in the near future. The rich reference section, many hands-on applets, and various further investigation clues in the book make it an ideal companion for such a course.

The reviewer can only wish more books of that kind will appear.

Yunus E. Zeytuncu
University of Michigan–Dearborn

Typesetting & Layout: *mathScreen online, CH-4123 Allschwil*