**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik

**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft

**Band:** 75 (2020)

**Heft:** 4

**Rubrik:** Aufgaben

Elem. Math. 75 (2020) 176 – 179
0013-6018/20/040176-4
DOI 10.4171/EM/420



**Elemente der Mathematik**

# Aufgaben

## Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Mai 2021 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

**Aufgabe 1404:** Gegeben sei ein Dreieck mit Seiten $a$, $b$, $c$, Seitenhalbierenden $s_a$, $s_b$, $s_c$ und halbem Umfang $s$. Man beweise die Ungleichung

$$\frac{(s_a+s_b)^2}{(s-a)(s-b)}+\frac{(s_b+s_c)^2}{(s-b)(s-c)}+\frac{(s_c+s_a)^2}{(s-c)(s-a)}\geq 36.$$

Oleh Faynshteyn, Leipzig, D

**Aufgabe 1405:** Man bestimme

$$\int_0^1\int_0^3 \log\left(\frac{x^2+u}{ux^2+1}\right)\frac{u}{1-x^2}\,du\,dx.$$

Seán M. Stewart, Bomaderry, AUS

**Aufgabe 1406 (Die einfache dritte Aufgabe):** Man definiere eine Folge natürlicher Zahlen $a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ rekursiv durch $a_1 > 1$,

$$a_n = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{falls } a_n \text{ ein Quadrat ist,} \\ a_n + 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

und beweise, dass die Folge schliesslich mit der Periode 3, 5, 7, 9 endet, falls $a_1$ ungerade ist und mit der Periode 2, 4 endet, falls $a_1$ gerade ist.

Jürgen Spilker, Stegen, D

## Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4, 2019

**Aufgabe 1392.** Durch die Ecke $A$ eine Dreiecks $ABC$ ziehe man die Parallele $\delta'_a$ zur Eulerschen Gerade des Dreiecks. Es sei $\delta_a$ die zu $\delta'_a$ symmetrische Gerade bezüglich der Höhe durch $A$. Analog werden $\delta_b$ und $\delta_c$ definiert. Man zeige, dass die Geraden $\delta_a$, $\delta_b$, $\delta_c$ sich in einem Punkt schneiden, dessen Abstand zum Höhenschnittpunkt gleich dem Umkreisradius des Dreiecks ist.

Gheorghe Bercea, München, D

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind Beiträge von folgenden 9 Lesern eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Heinz Klement (Asperg, D), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH) und Lienhard Wimmer (Isny, D).

Während die meisten Leser mit analytischen Mitteln zu Werke gehen, gelingt es anderen Lesern den behaupteten Schnittpunkt geometrisch zu charakterisieren. *Gerhard Wanner*, dessen Lösung wir folgen, bringt den Mittelpunkt des Neunpunktekreises ins Spiel, da der Umkreismittelpunkt und der Höhenschnittpunkt symmetrisch bezüglich dieses Punktes liegen.

Wir zeichnen das Dreieck $ABC$ mit zugehörigem Umkreismittelpunkt $U$, Höhenschnittpunkt $H$, welche die Eulersche Gerade aufspannen, und in deren Mitte das Zentrum des Neunpunktekreises $N$. Nun spiegeln wir das Dreieck $ABC$ entlang der Geraden $\delta'$ an der Symmetrieachse durch $N$ zu einem Dreieck $A'B'C'$ mit denselben Winkeln und gleichem Umkreisradius (siehe Figur Seite 178).

Bei dieser Spiegelung vertauschen $U$ und $H$ ihre Rollen. Anschliessend spiegeln wir $A'$ an der Höhe $AH$ zu einem Punkt $Z$, der nach Konstruktion sowohl auf $\delta_a$ als auch auf dem Umkreis $k'$ mit Mittelpunkt $H$ liegt. Da beide Linien $A'Z$ als auch $BC$ zu $AH$ senkrecht sind, verläuft diese Spiegelung parallel zu $BC$.

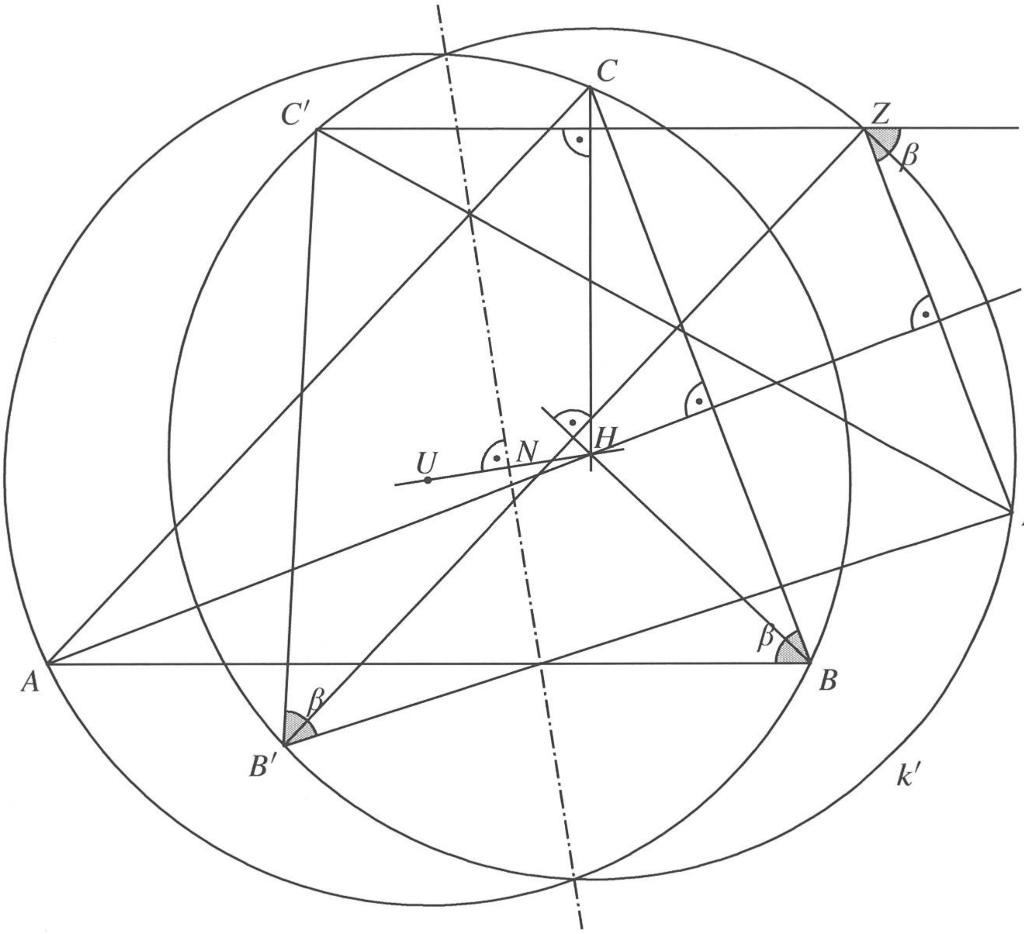
Schliesslich ziehen wir durch $C'$ die Parallele zu $AB$. An deren Schnittpunkt mit $A'Z$ entsteht ein Parallelwinkel zu $\beta$ in $B$. Da dieser über dem gleichen Bogen $A'C'$ wie Winkel $\beta$ in $B'$ liegt, muss nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes (Eukl. III.21) der Schnittpunkt auf dem Umkreis $k'$ liegen und daher mit dem an $CH$ gespiegelten Punkt $C'$ zusammenfallen.

Analog gilt das auch, wenn man $B'$ an $BH$ spiegelt und somit gehen $\delta_a$, $\delta_b$ und $\delta_c$ durch $Z$, welches auf dem Umkreis von $A'B'C'$ liegt.

**Aufgabe 1393.** Sei $F_n$ die Fibonacci-Folge, definiert durch $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $g \geq 2$, $k$ seien natürliche Zahlen. Man beweise, dass die Kongruenz $F_n \equiv n \mod g^k$ unendlich viele Lösungen in natürlichen Zahlen $n$ hat.

Jürgen Spilker, Stegen, D

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Folgende 8 Leser haben Lösungen eingesandt: Moritz Adelmeyer (Zürich, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D) und Albert Stadler (Herrliberg, CH).




Alle Löser benutzen die Tatsache, dass die Fibonacci-Folge periodisch modulo $g^k$ ist. Wir folgen den Ausführungen von *Walter Burgherr*, der dies exemplarisch ausführt.

Der Beweis wird für $k = 1$ und $g \geq 2$ geführt, dann gilt er auch für $G = g^k$.

Die Folge $F_n \bmod g$ ist periodisch, denn die Addition $F_{n+2} \equiv_g F_{n+1} + F_n$ hat nur $g^2$ mögliche Summandenpaare $(F_{n+1}, F_n)$ modulo $g$. Eines wird sich wiederholen und dann wird die Periodizität mit einer Länge $p \leq g^2$ beginnen. Wegen $F_n \equiv_g F_{n+2} - F_{n+1}$ lässt sich auch rückwärts schreiten, deshalb gibt es keine Vorperiode.

Wegen $F_0 = 0$ ergibt sich $F_{k \cdot p} \equiv_g 0$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Mit $k = j \cdot g$ für $j \in \mathbb{N}_0$ ergibt sich $F_{j \cdot g \cdot p} \equiv_g 0 \equiv_g j \cdot g \cdot p$. Daher gilt spätestens nach $g^3$ Schritten wieder $F_n \equiv_g n$.

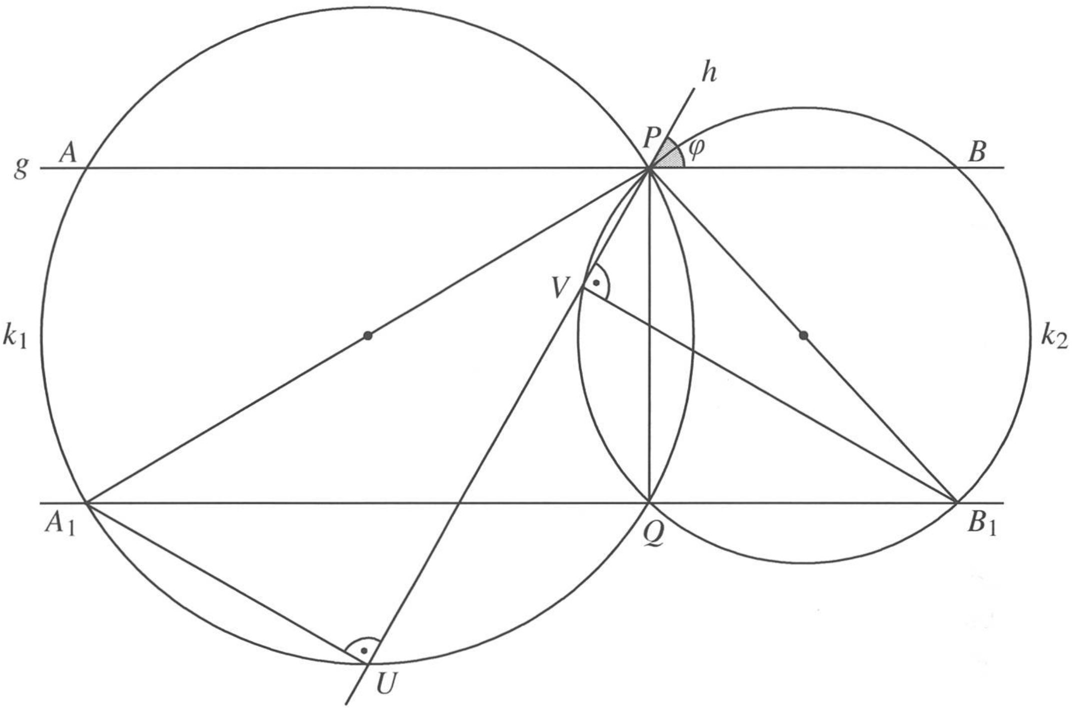
**Aufgabe 1394 (Die einfache dritte Aufgabe).** Gegeben seien zwei sich in $P$ und $Q$ schneidende Kreise $k_1$ und $k_2$. Sei $g$ die Senkrechte zu $PQ$ durch $P$ und $A$ und $B$ die von $P$ verschiedenen Schnittpunkte von $g$ mit $k_1$ und $k_2$. Sei $h$ eine weitere durch $P$ verlaufende Gerade im spitzen Winkel $\varphi$ zu $g$ und deren von $P$ verschiedene Schnittpunkte mit $k_1$ und $k_2$ seien $U$ und $V$. Man zeige $UV = AB\cos(\varphi)$.

Johannes M. Ebersold, St. Gallen, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Von folgenden 17 Lesern sind Lösungen eingegangen: Moritz Adelmeyer (Zürich, CH), Šefket Arslanagić (Sarajevo, BIH), Gheorghe

Bercea (München, D), Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Heinz Klement (Asperg, D), Joachim Klose (Bonn, D), Juan Läuchli (Winterthur, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D), Gerhard Wanner (Genève, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die meisten Löser sehen, dass $AB$ der doppelte Abstand der Kreismittelpunkte und dass $UV$ der doppelte Abstand der Sehnenmittelpunkte $PU$, $PV$ ist. *Gheorghe Bercea*, dessen Lösung wir folgen, interpretiert die Strecke $UV$ als eine Projektion einer Strecke der Länge $AB$ auf die Gerade $h$.




Die Senkrechte zu $PQ$ durch $Q$ schneidet die Kreise $k_1$ und $k_2$ ausser in $Q$ auch noch in $A_1$ und $B_1$. Das Viereck $AA_1B_1B$ ist ein Rechteck und $PA_1$ und $PB_1$ sind Durchmesser in $k_1$ bzw. $k_2$. Daraus folgt, dass $\sphericalangle A_1UP = \sphericalangle B_1VP = 90°$, d.h. $UV$ ist die orthogonale Projektion von $A_1B_1$ auf $h$. Da $A_1B_1$ gleich lang wie $AB$ ist, folgt damit die Behauptung.