

Zeitschrift:	Elemente der Mathematik
Herausgeber:	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band:	75 (2020)
Heft:	4
Artikel:	Begegnung zwischen klassischen Mittelwerten und Kegelschnitten
Autor:	Jäger, Joachim
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-880891

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Begegnung zwischen klassischen Mittelwerten und Kegelschnitten

Joachim Jäger

Joachim Jäger wurde an der Universität des Saarlandes in Mathematik promoviert. Nach einer mehrjährigen Tätigkeit an einer pädagogischen Hochschule lehrte er über 30 Jahre Mathematik an der Hochschule für Technik und Wirtschaft in Saarbrücken. Nach dem Eintritt in den Ruhestand interessierte er sich für Elementarisierung von Mathematik mit einem Fokus auf die Mathematiklehre.

1 Einführung

1.1 Fragestellung

Abbildung 1 zeigt eine wohlbekannte geometrische Darstellung der klassischen Mittelwerte A (arithmetisch), G (geometrisch) und H (harmonisch) in einem Kreis [1, S. 74].

$$A(p, q) = \frac{p + q}{2}, \quad G(p, q) = \sqrt{p \cdot q}, \quad H(p, q) = \frac{2pq}{p + q}, \quad p, q > 0 \quad (1)$$

Die Anfänge der Theorie der Mittelwerte und der Kegelschnitte liegen in der griechischen Antike. Aber erst Pappos publizierte eine geometrische Darstellung der klassischen Mittelwerte (arithmetisch, geometrisch, harmonisch) in einem Kreis. In neuerer Zeit kamen andere gemeinsame Darstellungen dieser Mittelwerte in einem Kreis hinzu. Diese Darstellungen sind Ausgangspunkt für Verallgemeinerungen auf beliebige Kegelschnitte und eine Dynamisierung, die den Zusammenhang zwischen klassischen Mittelwerten und Kegelschnitten in einem neuen Licht erscheinen lässt. Gegeben ist ein Kegelschnitt c , ein Punkt S außerhalb c und eine Halbgerade s , die sich um ihren Endpunkt S dreht, außerdem einer der klassischen Mittelwerte M . Falls s den Kegelschnitt in den Punkten P und Q trifft, sei $p = |SP|$ und $q = |SQ|$. Nun kann man die Spur desjenigen Punktes $M(P, Q)$ verfolgen, der zwischen P und Q liegt und von S den Abstand $M(p, q)$ besitzt. Der Artikel beschreibt diese Spur als Kegelschnitt, Gerade oder Doppelgerade. Dabei werden geometrische (affin, projektiv) und algebraische Methoden eingesetzt und miteinander verglichen.

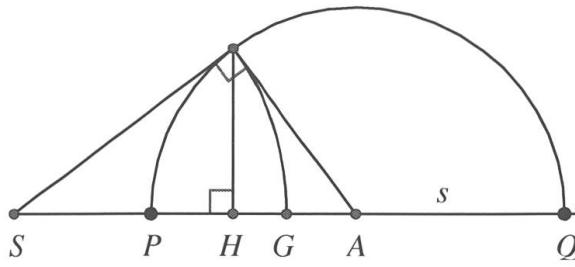


Abbildung 1 Klassische Mittelwerte am Kreis

In Abbildung 1 werden von S aus die Abstände $|SP|$, $|SQ|$ und ihre Mittelwerte auf einer Zentralen s eines Kreises abgetragen. Die den Mittelwerten entsprechenden Punkte bezeichnen wir der Einfachheit halber wieder mit A , G und H . Abbildung 1 ist Ausgangspunkt für Verallgemeinerungen:

- An die Stelle des Kreises tritt ein nicht entarteter Kegelschnitt c (Ellipse, Parabel oder Hyperbel).
- Die Zentrale s wird durch eine beliebige Sekante von c ersetzt, die durch einen fest vorgegebenen Punkt S außerhalb c verläuft.
- Wir bestimmen die Bahnen, auf denen sich die Mittelwerte A , G und H bewegen, wenn s sich um S dreht.

1.2 Generelle Voraussetzungen

In der reellen affinen Ebene seien ein nicht entarteter Kegelschnitt c , ein Punkt S außerhalb c und eine Gerade s durch S gegeben. Ist c Mittelpunktskegelschnitt (Ellipse oder Hyperbel), so bezeichnen wir den Mittelpunkt mit O . Für $c \cap s \neq \emptyset$ sei $c \cap s = \{P, Q\}$. Dabei ist der Grenzfall $P = Q$ erlaubt; s ist dann Tangente an c . Falls c eine Hyperbel ist, setzen wir voraus, dass P und Q auf demselben Hyperbelast liegen. Wir setzen $p := |SP|$ und $q := |SQ|$. M sei nun einer der Mittelwerte A , G oder H . Wir tragen $M(p, q)$ von S aus auf s ab und erhalten so einen Punkt $M_S(P, Q)$ zwischen P und Q . Dreht sich s um S und schneidet dabei c , so wandert $M_S(P, Q)$ auf einer Bahn c_M . Sie enthält offenbar die Berührpunkte H_1 und H_2 der Tangenten durch S an c , denn wenn s im Grenzfall zur Tangente wird, fallen die Punkte P und Q und damit A , G und H in einem der Punkte H_1 oder H_2 zusammen. Für $P \neq Q$ sei T der Schnittpunkt der Tangenten an c in P und Q . Im Fall $P = Q$ sei $T := P = Q$. Die Berührpunkte der zu s parallelen Tangenten an c bezeichnen wir mit A_1 und A_2 . Im Fall einer Parabel entspricht, projektiv gesehen, einem dieser Punkte ein Fernpunkt.

1.3 Ergebnisse

Abbildung 2 illustriert die Ergebnisse am Beispiel einer Ellipse. Dort gilt:

- $H_S(P, Q) \in H_1 H_2 = \pi_c(S)$ (Polare zu S bzgl c), also $c_H = H_1 H_2$.

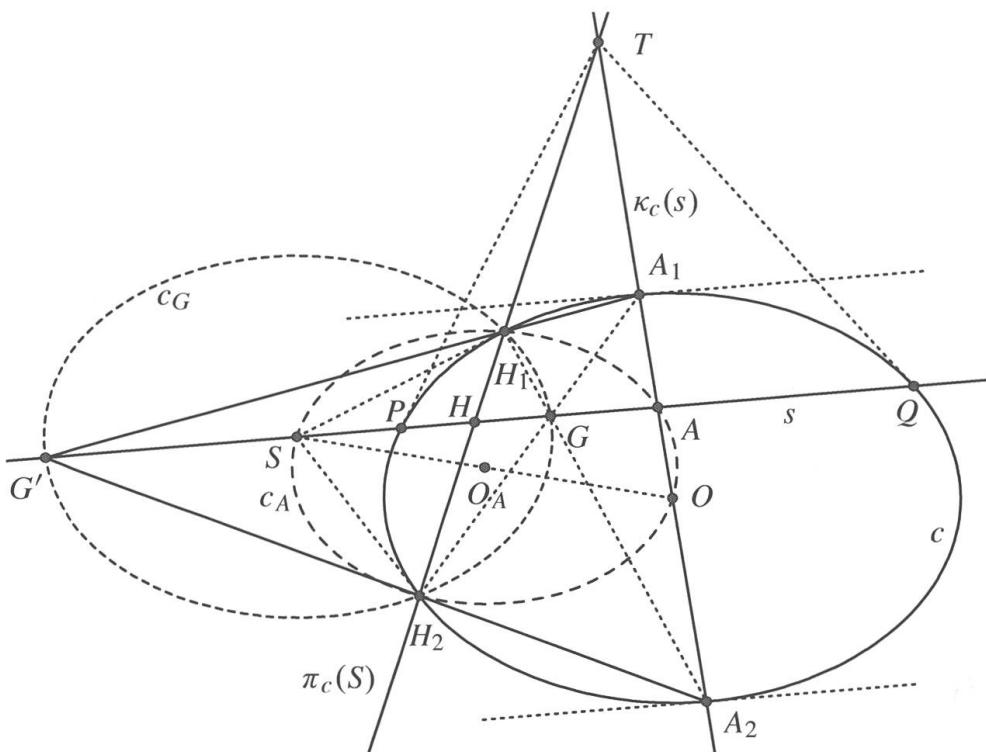


Abbildung 2 Mittelwerte bei einer Ellipse

- (b) $A_S(P, Q) = s \cap A_1A_2$; $A_S(P, Q)$ bewegt sich auf einer Ellipse c_A . Sie ist achsparallel und ähnlich zu c und ihr Mittelpunkt O_A ist der Mittelpunkt von \overline{SO} . (A_1A_2 ist der zu s konjugierte Durchmesser $\kappa_c(s)$ von s bzgl. c .)
 - (c) $G_S(P, Q)$ liegt auf einer Ellipse c_G . Sie ist achsparallel und ähnlich zu c und ihr Mittelpunkt ist S .
 - (d) $G := H_1A_2 \cap H_2A_1$ und $G' := H_1A_1 \cap H_2A_2$ liegen auf c_G . Wenn G innerhalb c liegt, ist $G = G_S(P, Q)$ und es gilt $GT = \pi_c(G')$. Liegt G' innerhalb c , so ist $G' = G_S(P, Q)$ und es gilt $G'T = \pi_c(G)$. Der Mittelpunkt von $\overline{GG'}$ ist S .

Für eine Hyperbel anstelle einer Ellipse sind die Ergebnisse völlig, und für eine Parabel sinngemäß analog (Abb. 3 und Abb. 4). Wir beweisen die Ergebnisse in Abschnitt 3 mit algebraischen und geometrischen Methoden (affin bzw. projektiv) und beleuchten dabei die Eignung der unterschiedlichen Beweismethoden. Abschnitt 2 stellt dazu Grundlagen bereit.

2 Grundlagen

2.1 Geometrische Grundlagen

Der affinen ebenen Geometrie liegt die reelle affine Ebene zugrunde. Die strukturerhaltenden Abbildungen sind hier affine Abbildungen. Sie lassen sich als Verkettungen von linearen Abbildungen mit Translationen beschreiben. Zwei Objekte heißen *affin verwandt*, wenn es eine affine Abbildung gibt, die das eine auf das andere Objekt abbildet. Eigenschaften, die sich bei affinen Abbildungen nicht ändern, heißen *affin invariant*; z.B. sind

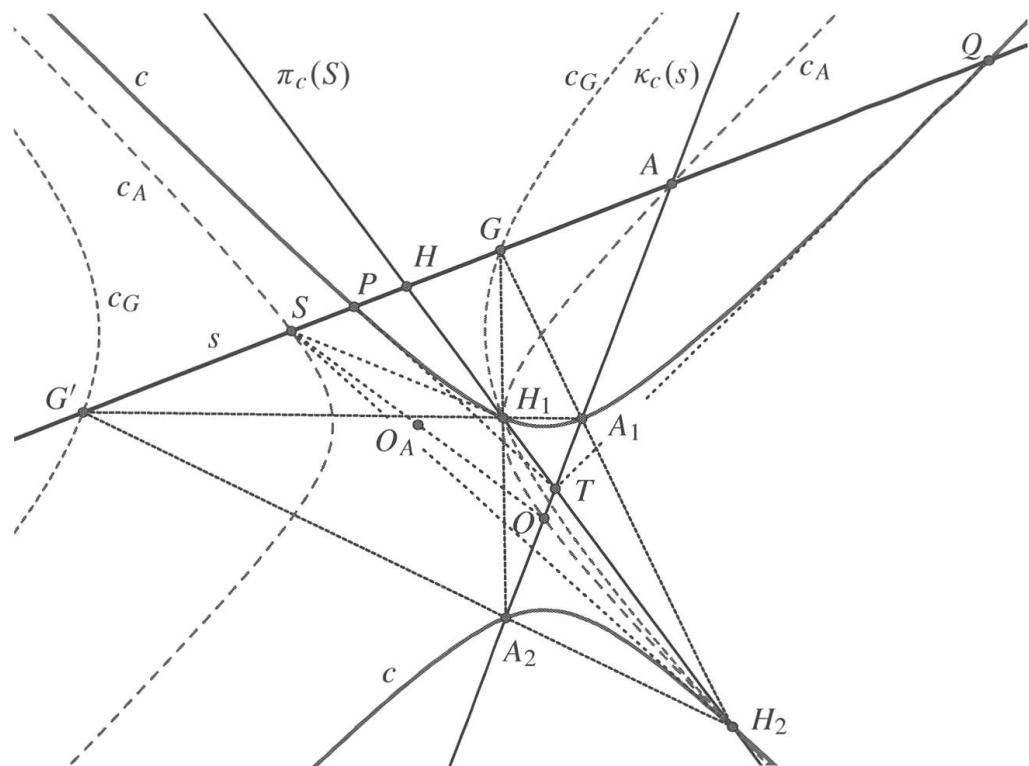


Abbildung 3 Mittelwerte bei einer Hyperbel

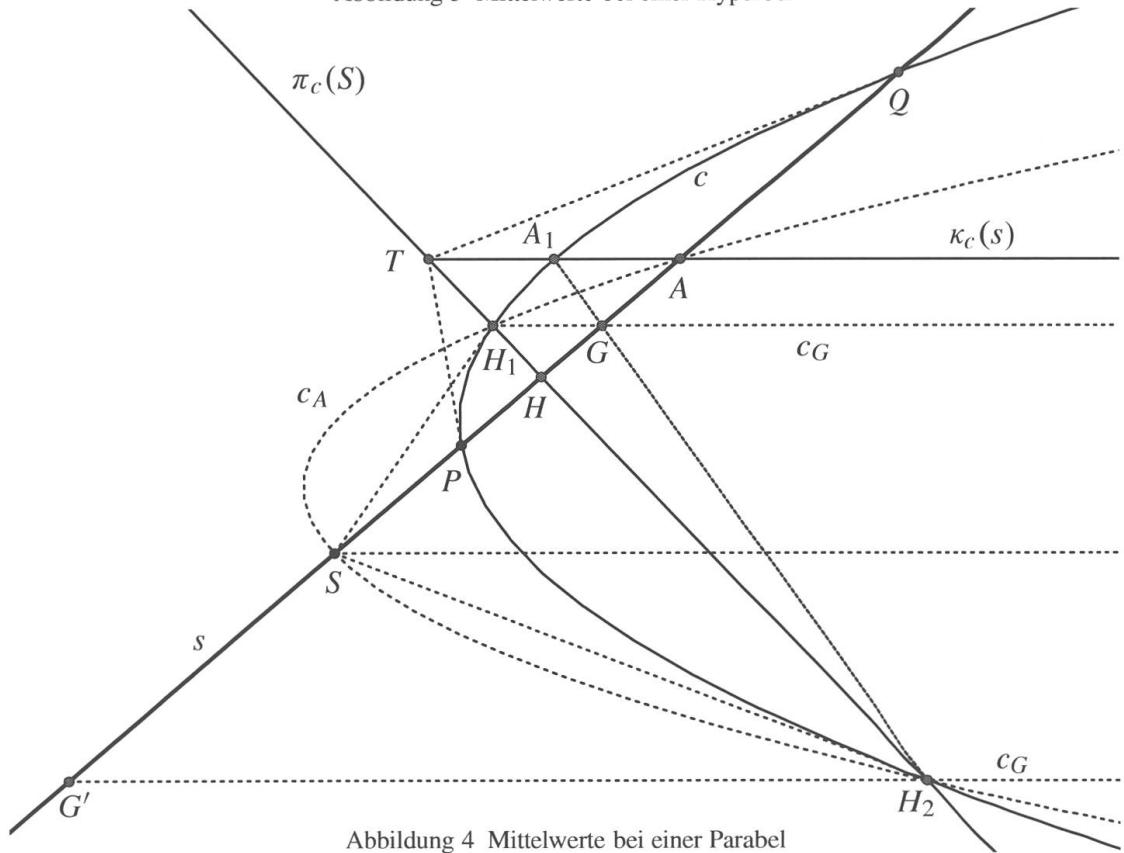


Abbildung 4 Mittelwerte bei einer Parabel

Geradlinigkeit und Parallelität von Geraden affin invariant. Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln bilden jeweils eine Menge untereinander affin verwandter Objekte. Insbesondere sind alle Ellipsen einem Kreis affin verwandt. Aussagen, die nur affin invariante Eigenschaften eines Kegelschnitts betreffen, können daher an einem Repräsentanten des entsprechenden Kegelschnitttyps bewiesen werden, Aussagen für Ellipsen folglich an einem Kreis.

In der projektiven Geometrie wird die reelle affine Ebene durch Fernpunkte und die Ferngerade zur reellen projektiven Ebene ergänzt. Jeder Richtung in der affinen Ebene wird umkehrbar eindeutig ein *Fernpunkt* zugeordnet. Die Menge der Fernpunkte ist die *Ferngerade*. Hier sind die projektiven Abbildungen die Grundlage für die projektive Invarianz. Z.B. ist Geradlinigkeit projektiv invariant, nicht jedoch die Parallelität. Affin parallele Geraden schneiden sich projektiv in dem ihrer Richtung zugeordneten Fernpunkt. Alle Kegelschnitte sind zueinander und damit einem Kreis projektiv verwandt. Daher genügt es, projektiv invariante Eigenschaften an einem Kreis nachzuweisen.

Wir gehen davon aus, dass der Leser bzw. die Leserin mit Grundtatsachen der projektiven Geometrie vertraut ist (siehe etwa [4, 5, 11]) und erinnern hier nur an einige wichtige Begriffe und Aussagen in dem in 1.2 beschriebenen Kontext: Dort ist die Gerade H_1H_2 die *Polare* $\pi_c(S)$ zu S bzgl. c , und T ist als Schnittpunkt der Tangenten in P und Q der *Pol* $\pi_c(s)$ zur Gerade s bzgl. c . Es gilt der Hauptsatz der Polarentheorie ([7] S. 261): $X \in \pi_c(Y) \Leftrightarrow Y \in \pi_c(X)$. Insbesondere gehen die Polaren aller Punkte einer Gerade durch den Pol der Gerade; z.B. ist $T \in \pi_c(S)$. Der zu s konjugierte Durchmesser $\kappa_c(s)$ bzgl. c ist die (wohlbestimmte) Gerade durch die Mittelpunkte aller zu s parallelen Sehnen von c . Im Fall einer Ellipse oder Hyperbel ist in unserem Kontext $\kappa_c(s) = A_1A_2$; zugleich ist $\kappa_c(s)$ die Polare des Fernpunktes in Richtung von s . Insbesondere ist $A \in \kappa_c(s)$.

Eine der wichtigsten projektiven Invarianten ist das *Doppelverhältnis DV*. Unter den Voraussetzungen von 1.2 sei R ein Punkt zwischen P und Q und $r = |SR|$. Dann ist

$$DV(P, Q, R, S) = \frac{(r - p) \cdot q}{(r - q) \cdot p}.$$

Das Quadrupel (P, Q, R, S) heißt *harmonisch*, wenn $DV(P, Q, R, S) = -1$ ist. Eine einfache Rechnung zeigt: $DV(P, Q, R, S) = -1 \Leftrightarrow r = \frac{2pq}{p+q} = H(p, q)$, also

$$(P, Q, R, S) \text{ harmonisch} \Leftrightarrow R = H_S(P, Q). \quad (2)$$

Zur Theorie der Kegelschnitte verweisen wir auf [2, 3, 6, 7, 8, 12]. Kegelschnitte sind ursprünglich als Schnitte eines Doppelkegels mit einer Ebene definiert. Geht die Ebene durch die Spitze des Doppelkegels, so heißt der Kegelschnitt *entartet*. Nicht entartet sind Ellipse, Parabel und Hyperbel. Aus dieser Definition folgt, dass nicht entartete Kegelschnitte projektive Bilder eines Kreises sind. Die Menge aller Geraden der projektiven Ebene durch einen Punkt Z heißt *Geradenbüschel* B_Z mit Zentrum Z . Einem Quadrupel (g_1, \dots, g_4) von Geraden von B_Z kann man ein Doppelverhältnis wie folgt zuordnen: Schneidet eine Gerade g , die nicht durch Z geht, die Geraden g_i in den Punkten P_i , so hängt $DV(P_1, \dots, P_4)$ nicht von der Wahl von g ab. $DV(P_1, \dots, P_4)$ heißt dann Doppelverhältnis $DV(g_1, \dots, g_4)$ von (g_1, \dots, g_4) . Eine Abbildung zwischen zwei Geradenbüscheln, zwischen einer Gerade und einem Geradenbüschel oder zwischen zwei

Geraden heißt *Projektivität*, wenn sie das Doppelverhältnis beliebiger vier zugeordneter Punkte bzw. Geraden nicht ändert. Ein Spezialfall ist der folgende: Seien a eine Gerade, Z und Z' Punkte mit $Z, Z' \notin a$. Sei nun $g \in B_Z$, $C := g \cap a$ und $g' := CZ'$. Dann nennt man die Abbildung $B_Z \rightarrow B_{Z'}$, $g \mapsto g'$, eine *Perspektivität mit Achse* a . Nun gilt ([7], S. 218 ff.):

Satz von Steiner: Ist $\varphi : B_Z \rightarrow B_{Z'}$ eine Projektivität, die keine Perspektivität ist, so ist die Menge der Schnittpunkte $\{g \cap \varphi(g) | g \in B_Z\}$ ein Kegelschnitt durch Z und Z' .

2.2 Mittelwerte

Ein (bivariate) *Mittelwert* ist eine Funktion $M : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ mit der Eigenschaft $\min(x, y) \leq M(x, y) \leq \max(x, y)$. Gilt $M(t \cdot x, t \cdot y) = t \cdot M(x, y)$ für alle $x, y, t > 0$, so heißt M *homogen*. A, G und H sind homogen. Ein homogener Mittelwert M ist in folgendem Sinn affin invariant: Ist φ eine affine Abbildung, so gilt $M_{\varphi(S)}(\varphi(P), \varphi(Q)) = \varphi(M_S(P, Q))$. In unserem Kontext sei V ein Richtungsvektor von s , $P = S + \lambda_P \cdot V$, $Q = S + \lambda_Q \cdot V$ mit geeigneten λ_P und λ_Q und M einer der Mittelwerte A, G oder H . Dann folgt aus der Homogenität:

$$M_S(P, Q) = S + \lambda_M \cdot V \quad \text{mit} \quad \lambda_M = M(\lambda_P, \lambda_Q), \quad (3)$$

$$\lambda_A = \frac{\lambda_P + \lambda_Q}{2}, \quad \lambda_G = \sqrt{\lambda_P \lambda_Q} \quad \text{und} \quad \lambda_H = \frac{2\lambda_P \lambda_Q}{\lambda_P + \lambda_Q}. \quad (4)$$

Da das Doppelverhältnis projektiv invariant ist, ist das harmonische Mittel projektiv invariant (nicht jedoch das arithmetische und geometrische Mittel).

2.3 Algebraische Grundlagen

Algebraisch gesehen ist ein Kegelschnitt c die (nicht leere) Lösungsmenge einer allgemeinen quadratischen Gleichung in zwei reellen Variablen x und y :

$$\alpha_{11}x^2 + 2\alpha_{12}xy + \alpha_{22}y^2 + 2\alpha_{13}x + 2\alpha_{23}y + \alpha_{33} = 0 \quad \text{mit } \alpha_{ij} \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

wobei α_{11}, α_{12} oder $\alpha_{22} \neq 0$ ist. Hier sind entartete Fälle möglich.

Man kann (5) mit $K := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$, $L := \begin{pmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \end{pmatrix}$, $X := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $\varepsilon := \alpha_{33}$ in der Form

$$X^t \cdot K \cdot X + 2 \cdot L^t \cdot X + \varepsilon = 0 \quad (6)$$

notieren. K ist dabei symmetrisch. Das hochgestellte t markiert die Transposition. Falls c Ellipse oder Hyperbel ist, ist K invertierbar. Der Mittelpunkt von c ist dann gegeben durch ([9], S. 77)

$$O = K^{-1} \cdot L. \quad (7)$$

Die Polare $\pi_c(P)$ von P bzgl. c hat für $P \neq O$ die Gleichung ([9] S. 92 ff.)

$$P^t \cdot K \cdot X + L^t \cdot (X + P) + \varepsilon = 0. \quad (8)$$

Im Fall $P \in c$ ist dies die Gleichung der Tangente an c in P . Ist V Richtungsvektor von s , so ist

$$X^t \cdot K \cdot V + L^t \cdot V = 0 \quad (9)$$

die Gleichung des zu s konjugierten Durchmessers $\kappa_c(s)$ von c ([9], S. 99).

Sei nun s eine Gerade durch S mit Richtungsvektor V , die c in $X = S + \lambda V$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ schneidet. Dann gilt ([9], S. 88)

$$0 = X^t K X + 2L^t X + \varepsilon = (S + \lambda V)^t K (S + \lambda V) + 2L^t (S + \lambda V) + \varepsilon.$$

Das ist die quadratische Gleichung $\lambda^2 u + 2\lambda v + w = 0$ mit $u = V^t K V$, $v = S^t K V + L^t V$, $w = S^t K S + 2L^t S + \varepsilon$, die für $\Delta := v^2 - u \cdot w \geq 0$ folgende Schnittpunkte P, Q von s mit c liefert:

$$P = S + \lambda_P V, \quad Q = S + \lambda_Q V; \quad \lambda_P = \frac{-v - \sqrt{\Delta}}{u}, \quad \lambda_Q = \frac{-v + \sqrt{\Delta}}{u}. \quad (10)$$

Wegen $\lambda_P + \lambda_Q = -\frac{2v}{u}$ und $\lambda_P \lambda_Q = \frac{w}{u}$ folgt aus (4)

$$\lambda_A = -\frac{v}{u}, \quad \lambda_G = \sqrt{\frac{w}{u}}, \quad \lambda_H = -\frac{w}{v}. \quad (11)$$

Für unsere Fragestellung ist die Lage von c in der Ebene ohne Bedeutung. Durch eine Drehung und Verschiebung können wir c in eine zum Koordinatensystem achsparallele Lage bringen. Dann vereinfacht sich (5) mit neuen Koeffizientenbezeichnungen zu

$$ax^2 + \beta y^2 + 2(\gamma x + \delta y) + \varepsilon = 0, \quad K = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}. \quad (12)$$

3 Die Spur der Mittelwerte

Wir beweisen nun die Aussagen von 1.3 unter den Voraussetzungen in 1.2. Wir notieren allgemein einen Punkt R in Koordinatenform so: $R = (x_R, y_R)^t$.

3.1 Das harmonische Mittel

Sei $s \cap c = \{P, Q\}$. Dann gilt:

Satz 1. Sei $H := s \cap \pi_c(S)$. Dann ist $H = H_S(P, Q)$, d.h. für $H_S(P, Q)$ gilt: $S^t K H + L^t (S + H) + \varepsilon = 0$, bzw. unter den Voraussetzungen von (12): $\alpha x_S x_H + \beta y_S y_H + \delta(x_S + x_H) + \gamma(y_S + y_H) + \varepsilon = 0$.

3.1.1 Algebraischer Beweis von Satz 1

Gemäß (3) und (4) ist $H = H_S(P, Q) = S + \lambda_H V$. Nun erfüllt wegen (11) $X = H$ die Gleichung (8) von $\pi_c(S)$, so dass H auf $\pi_c(S)$ liegt:

$$\begin{aligned} & S^t K (S + \lambda_H V) + L^t (2S + \lambda_H V) + \varepsilon \\ &= \lambda_H (S^t K V + L^t V) + S^t K S + 2L^t S + \varepsilon = \lambda_H v + w = -\frac{w}{v} v + w = 0. \end{aligned}$$

Die gesuchte Kurve c_H ist also die Polare $\pi_c(S)$. □

3.1.2 Geometrischer Beweis von Satz 1

Die harmonische Teilung bietet den natürlichen Zugang zur Bestimmung von $H_S(P, Q)$. Es gilt ([8], S. 73): Ist $H = s \cap \pi_c(S)$, so ist (P, Q, H, S) harmonisch. Aus (2) folgt dann: $H = H_S(P, Q)$.

3.2 Das arithmetische Mittel

Unter den Voraussetzungen von 1.2 sei s eine beliebige Gerade durch S .

Satz 2. Für $A := s \cap \kappa_c(s)$ gilt:

- (a) *A liegt auf dem Kegelschnitt c_A mit der Gleichung $(X^t K + L^t)(X - S) = 0$, bzw. unter den Voraussetzungen von (12): $(\alpha x + \gamma) \cdot (x - x_s) + (\beta y + \delta) \cdot (y - y_s) = 0$.*
- (b) *Für $s \cap c = \{P, Q\}$ ist $A = A_S(P, Q)$.*
- (c) *$S, H_1, H_2 \in c_A$.*
- (d) *Ist c Ellipse oder Hyperbel mit Mittelpunkt O , so liegt O auf c_A , und der Mittelpunkt O_A von \overline{SO} ist der Mittelpunkt von c_A .*
- (e) *c und c_A sind einander ähnlich und achsparallel.*

3.2.1 Algebraischer Beweise von Satz 2

(a) Sei V ein Richtungsvektor von s . Wegen $A \in \kappa_c(s)$ gilt nach (9): $A^t KV + L^t V = 0$. Wegen $A \in s$ hat A die Form $A = S + \lambda V$. Also ist

$$(S + \lambda V)^t KV + L^t V = 0.$$

Aus $\lambda V = A - S$ folgt dann nach Multiplikation mit λ

$$0 = ((S + \lambda V)^t K + L^t) \lambda V = (A^t K + L^t)(A - S),$$

so dass $X = A$ die Gleichung $(X^t K + L^t)(X - S) = 0$ erfüllt.

(b) Sei $s \cap c = \{P, Q\}$. Zu beweisen ist nur $A_S(P, Q) \in \kappa_c(s)$. Nach (3), (10) und (11) ist $A_S(P, Q) = S + \lambda_A V$ mit $\lambda_A = -\frac{v}{u}$, $u = V^t KV$ und $v = S^t KV + L^t V$. Wir setzen $X = A_S(P, Q)$ in die Gleichung (9) für $\kappa_c(s)$ ein:

$$\begin{aligned} X^t KV + L^t V &= (S + \lambda_A V)^t KV + L^t V = S^t KV + L^t V + \lambda_A V^t KV \\ &= v + \lambda_A u = v - \frac{v}{u} u = 0. \end{aligned}$$

Daher liegt $A_S(P, Q)$ auf $\kappa_c(s)$.

(c) Aus der Gleichung für c_A geht sofort $S \in c_A$ hervor. Dass H_1 und H_2 auf c_A liegen, wurde bereits in Abschnitt 1 festgestellt.

(d) Sei c Ellipse oder Hyperbel mit Mittelpunkt O . Nach (7) ist $O = -K^{-1}L$. Einsetzen in die Gleichung von c_A in (a) zeigt sofort $O \in c_A$. Nach (a) ist die Normalform von

c_A wegen der Symmetrie von K gegeben durch $X^T K X + 2L_A^T X + \varepsilon_A = 0$ mit $L_A := \frac{1}{2}(L^t - KS)$ und $\varepsilon_A := -L^t S$. Nach (7) ist der Mittelpunkt von c_A

$$O_A = -K^{-1}L_A = -K^{-1}\frac{1}{2}(L - KS) = -\frac{1}{2}K^{-1}L + \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}(O + S),$$

also Mittelpunkt von \overline{SO} .

(e) Weil c und c_A hinsichtlich der Matrix K übereinstimmen, sind c und c_A ähnliche Kegelschnitte in achsparalleler Lage. \square

3.2.2 Affin-geometrischer Teilbeweis von Satz 2

Wir beweisen den geometrischen Teil von Satz 2 nur für Ellipsen. Da alle Ellipsen affines Bild eines Kreises sind und das arithmetische Mittel nach Abschnitt 2.2 unter affinen Abbildungen invariant ist, genügt es, die Aussagen für einen Kreis zu beweisen (Abb. 5).

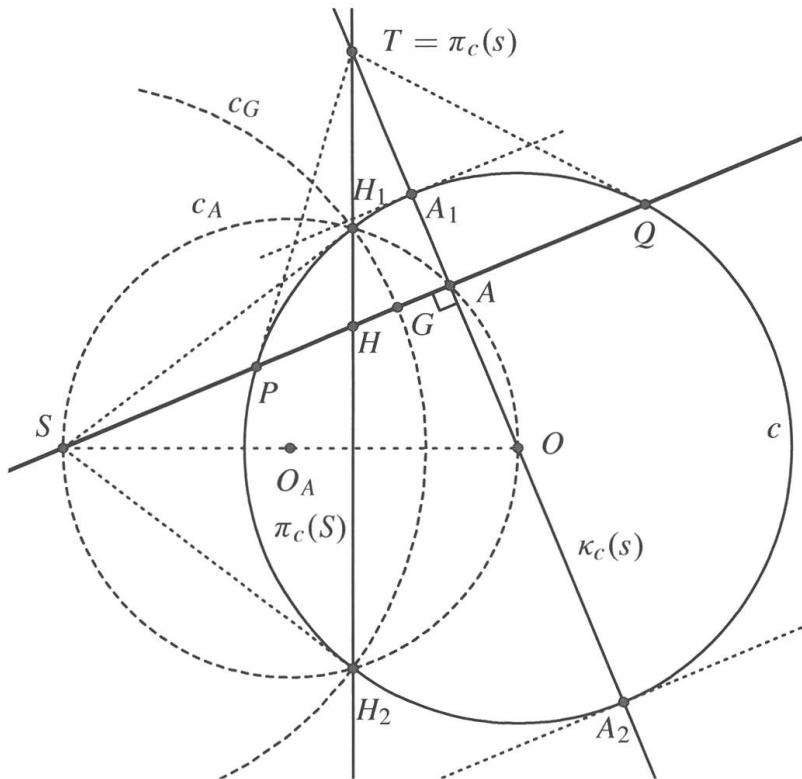


Abbildung 5 Mittelwerte am Kreis

Sei c ein Kreis mit Mittelpunkt O und sei $s \cap c = \{P, Q\}$. Der zu s konjugierte Durchmesser $\kappa_c(s)$ von c ist dann die Senkrechte zu s durch O . Er schneidet die Sehne \overline{PQ} in A und halbiert sie. Also ist $A = A_S(P, Q)$. Das Dreieck SOA ist rechtwinklig. Folglich liegt A auf dem Thaleskreis c_A mit dem Durchmesser \overline{SO} . Der Mittelpunkt O_A von c_A ist also der Mittelpunkt von \overline{SO} . Bei einer affinen Abbildung gehen die beiden Kreise c und c_A in achsparallele und ähnliche Ellipsen über, der konjugierte Durchmesser und das arithmetische Mittel in die entsprechenden Größen der Bildellipsen.

Bei Parabeln und Hyperbeln kann man ähnlich argumentieren. Man beweist die Aussagen – am einfachsten analytisch – für eine spezielle Parabel (z.B. $y = x^2$) bzw. Hyperbel (z.B. $x \cdot y = 1$) und schließt mit Hilfe affiner Invarianz.

3.2.3 Projektiv-geometrischer Teilbeweis von Satz 2

Dass $s \cap \kappa_c(s) = A_S(P, Q)$ ist, sofern $s \cap c = \{P, Q\}$ ist, folgt wieder aus der Eigenschaft der Sehnenshalbierung des konjugierten Durchmessers. Nun zeigen wir für Ellipsen und Hyperbeln mit Mittelpunkt O , dass $s \cap \kappa_c(s)$ auf einem Kegelschnitt c_A durch S und O liegt. Wir beweisen zunächst mit Hilfe der Steinerschen Charakterisierung von Kegelschnitten ([2], Nr. 209):

Hilfssatz 1. *Sei c ein Kegelschnitt, g eine Gerade, $T := \pi_c(g)$. Weiter sei S ein Punkt mit $S \notin g$ und $S \neq T$. Dann liegen die Punkte $Y := SX \cap \pi_c(X)$ für $X \in g$ auf einem Kegelschnitt c_A durch S und T .*

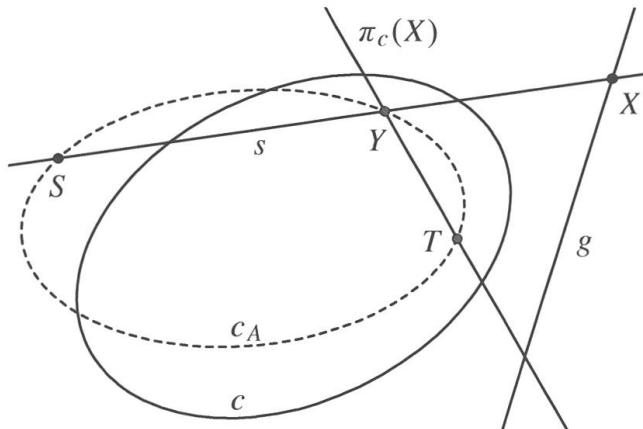


Abbildung 6 Zu Hilfssatz 1

Beweis (Abb. 6): Sei B_S das Geradenbüschel mit Zentrum S . Die Abbildung $B_S \rightarrow g$, $s \mapsto X := s \cap g$, ist eine Projektivität. Alle Polaren $\pi_c(X)$ mit $X \in g$ gehen durch $T = \pi_c(g)$, bilden daher ein Geradenbüschel B_T mit Zentrum T . Die Abbildung $g \rightarrow B_T$, $X \mapsto \pi_c(X)$, ist dann ebenso eine Projektivität ([11], S. 334). Das gilt dann auch für die Verkettung beider Abbildungen $B_S \rightarrow B_T$. Sie bildet für jedes $X \in g$ die Gerade SX auf $\pi_c(X)$ ab. Sie ist jedoch keine Perspektivität, da sie ST nicht auf sich selbst abbildet. Nach dem Satz von Steiner liegen dann die Schnittpunkte $Y := SX \cap \pi_c(X)$ korrespondierender Geraden von B_S und B_T auf einem Kegelschnitt durch die beiden Zentren S und T . \square

Wir wählen nun für g die Ferngerade. Dann ist $X := s \cap g$ der Fernpunkt in Richtung von s und $\pi_c(X) = \kappa_c(s)$. Nach Hilfssatz 1 liegen die Punkte $A = s \cap \kappa_c(s) = SX \cap \pi_c(X)$ auf einem Kegelschnitt c_A durch S und den Pol T der Ferngerade. Falls c ein Mittelpunktskegelschnitt ist, ist T der Mittelpunkt O von c . \square

Falls c eine Parabel ist, ist T der Fernpunkt in Richtung der Hauptachse der Parabel. In diesem Fall ist c_A selbst eine Parabel.

3.3 Das geometrische Mittel

Satz 3.

- (a) Das geometrische Mittel $G_S(P, Q)$ liegt auf dem Kegelschnitt c_G mit der Gleichung $X^t K X + 2L_G^t X + \varepsilon_G = 0$ mit $L_G := -KS$ und $\varepsilon_G := -2L^t S - \varepsilon$; bzw. unter den Voraussetzungen von (12): $\alpha x(x - 2x_S) + \beta y(y - 2y_S) - 2(\gamma x_S + \delta y_S) - \varepsilon = 0$.
- (b) $H_1, H_2 \in c_G$. Ist c Ellipse oder Hyperbel, so sind c und c_G achsparallel und ähnlich. Mittelpunkt von c_G ist dann S . Ist c eine Parabel, so besteht c_G aus einem Paar zur Hauptachse von c paralleler Geraden, die durch H_1 bzw. H_2 gehen. S liegt auf der Mittelparallele dieser beiden Geraden.

3.3.1 Algebraischer Beweis von Satz 3

- (a) Sei V ein Richtungsvektor von s . Nach (2), (3), (10) und (11) ist $G = G_S(P, Q) = S + \lambda_G V$ mit $\lambda_G = \sqrt{\lambda_P \lambda_Q} = \sqrt{w/u}$. Wir setzen $X = G$ in $X^t K X + 2L_G^t X + \varepsilon_G = 0$ ein. Unter Berücksichtigung des Symmetrie von K gilt dann:

$$\begin{aligned} G^t K G + 2L_G^t G + \varepsilon_G &= G^t K G - 2S^t K G - 2L^t S - \varepsilon \\ &= (S + \lambda_G V)^t K (S + \lambda_G V) - 2S^t K (S + \lambda_G V) - 2L^t S - \varepsilon \\ &= S^t K S + 2\lambda_G S^t K V + \lambda_G^2 V^t K V - 2S^t K S - 2\lambda_G S^t K V - 2L^t S - \varepsilon \\ &= \lambda_G^2 V^t K V - S^t K S - 2L^t S - \varepsilon = \frac{w}{u} u - w = 0. \end{aligned}$$

G liegt also auf dem Kegelschnitt mit der Gleichung $X^t K X + 2L_G^t X + \varepsilon_G = 0$. Da c_G und c hinsichtlich der Matrix K übereinstimmen, sind c_G und c einander ähnlich und achsparallel.

- (b) Dass H_1 und H_2 auf c_G liegen, wurde schon im 1. Abschnitt festgestellt. Der Mittelpunkt von c_G ist für eine Ellipse oder Hyperbel nach (7)

$$O_G = -K^{-1} \cdot L_G = -K^{-1} \cdot (-K \cdot S) = S.$$

Wir gehen nun von achsparalleler Lage von c und der Gleichung (12) aus. Bei einer Parabel sei etwa $\alpha = 0$ und $\beta > 0$. Die Hauptachse von c ist dann parallel zur x-Achse und die Koordinatengleichung von c_G reduziert sich auf

$$\beta y(y - 2y_S) - 2(\gamma x_S + \delta y_S) - \varepsilon = 0.$$

Die Lösungen sind

$$y = y_S + \sqrt{d} \quad \text{und} \quad y = y_S - \sqrt{d} \quad \text{mit} \quad d = y_S^2 + \frac{2(\gamma x_S + \delta y_S) + \varepsilon}{\beta}.$$

Damit besteht c_G aus zwei zur x-Achse parallelen Geraden, für die die Gerade mit der Gleichung $y = y_S$ Mittelparallele ist. Daraus folgt für diesen Fall die Behauptung. Der Fall $\alpha > 0, \beta = 0$ ist analog. \square

3.3.2 Affin-geometrischer Teilbeweis von Satz 3

Wir diskutieren nur den Fall einer Ellipse. Wie in 3.2.2 können wir uns auf einen Kreis beschränken, da auch das geometrische Mittel affin invariant ist. Sei also c ein Kreis (Abb. 5). Mit $p := |SP|$, $q := |SQ|$ ist nach dem Sehnen-Tangentensatz $p \cdot q = |SH_1|^2$, also $|SH_1| = \sqrt{pq} = G(p, q)$. D.h.: $G_S(P, Q)$ liegt auf dem Kreis c_G um S durch H_1 (und H_2). Bei Anwendung einer affinen Abbildung gehen die Kreise c und c_G in achsparallele und einander ähnliche Ellipsen über, das geometrische Mittel in das entsprechende geometrische Mittel der Bildellipse von c . \square

Bei Parabel und Hyperbeln kann man analog argumentieren, muss aber wie in 3.2.2 die Aussage zunächst für eine spezielle Parabel und eine spezielle Hyperbel beweisen (auch hier am einfachsten analytisch).

3.3.3 Variante von Satz 3 – projektiv-geometrisch

Abbildungen 2, 3 und 4 zeigen, dass das geometrische Mittel eine in Satz 3 nicht genannte Charakterisierung besitzt: Sei dazu wieder $\pi_c(S) \cap c = \{H_1, H_2\}$ und $\kappa_c(s) \cap c = \{A_1, A_2\}$. Wir setzen $G := H_1 A_2 \cap H_2 A_1$ und $G' := H_1 A_1 \cap H_2 A_2$ und der Kürze halber $A := A_S(P, Q)$, $H := H_S(P, Q)$, wenn $s \cap c \neq \emptyset$. Wir nummerieren die H_i so, dass G zwischen P und Q (und daher G' außerhalb \overline{PQ}) liegt.

Satz 4. *Unter den obigen Voraussetzungen gilt:*

- (a) G und G' liegen auf einem Kegelschnitt c_G durch H_1 und H_2 .
- (b) $G, G' \in s$ und (P, Q, G, G') und (H, A, G, G') sind harmonisch.
- (c) $G = G_S(P, Q) = H_{G'}(P, Q) = H_{G'}(H, A)$.

Beweis: (a) Dass G und G' auf einem Kegelschnitt liegen, beruht wieder auf der Steiner-schen Charakterisierung von Kegelschnitten und Hilfssatz 2.

Hilfssatz 2. *Seien C_1, C_2 verschiedene Punkte auf c . Sei weiter T ein Punkt, der weder auf c noch auf C_1C_2 liegt. Für $X \in c$ sei Y der zweite Schnittpunkt von XT mit c . Dann gilt: Die Schnittpunkte $D := C_1X \cap C_2Y$ und $E := C_1Y \cap C_2X$ liegen auf einem Kegelschnitt c_G durch C_1 und C_2 .*

Beweis (Abb. 7): Sei C der zweite Schnittpunkt von C_1T mit c . Sei $X \in c$, zunächst $X \neq C_1$. Sei weiter Y der zweite Schnittpunkt von XT mit c . Dann liegt $Z := C_1X \cap CY$ auf $\pi_c(T)$. Ist $X = C_1$, so tritt an die Stelle von C_1X bzw. CY die Tangente an c in C_1 bzw. C . Der Schnittpunkt dieser Tangenten liegt ebenso auf $\pi_c(T)$. Seien B_1, B_2 bzw. B_C die Geradenbüschel mit Zentrum C_1, C_2 bzw. C . Dann ist die Abbildung $B_1 \rightarrow \pi_c(T)$, $C_1X \mapsto Z = C_1X \cap \pi_c(T)$, eine Projektivität. Da aber $C_1X \cap \pi_c(T) = Z = CY \cap \pi_c(T)$ ist, ist auch die Abbildung $\pi_c(T) \rightarrow B_C$, $Z \mapsto CZ = CY$, eine Projektivität. Schließlich ist die Abbildung $B_C \rightarrow B_2$, $CY \mapsto C_2Y$ eine Projektivität ([11], S. 325). Daher ist die Verkettung dieser drei Abbildungen $B_1 \rightarrow \pi_c(T) \rightarrow B_C \rightarrow B_2$, $C_1X \mapsto C_2Y$ eine Projektivität. Da sie aber C_1C_2 nicht auf sich selbst abbildet, ist sie keine Perspektivität. Damit ist der Satz von Steiner anwendbar und es gilt: Die Schnittpunkte $D := C_1X \cap C_2Y$

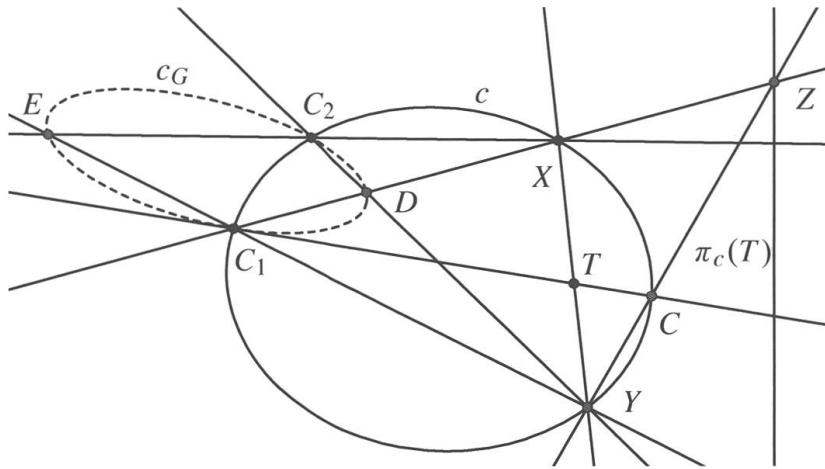


Abbildung 7 Zu Hilfssatz 2

(und aus Symmetriegründen $E := C_1 Y \cap C_2 X$) liegen auf einem Kegelschnitt c_G durch C_1 und C_2 . \square

(a) Sei c eine Ellipse oder Hyperbel mit Mittelpunkt O . Wir wenden Hilfssatz 2 mit $C_1 = H_1$, $C_2 = H_2$ und $T = O$ an. Dann ist $\pi_c(O)$ die Ferngerade, und O liegt auf dem konjugierten Durchmesser $\kappa_c(s) = A_1 A_2$. Daher ist nach Hilfssatz 2 mit der dortigen Notation $Y = A_2$ für $X = A_1$, $Y = A_1$ für $X = A_2$, und speziell liegen die Punkte $G' = H_1 A_1 \cap H_2 A_2$ und $G = H_1 A_2 \cap H_2 A_1$ auf einem Kegelschnitt c_G durch H_1 und H_2 .

Parabeln lassen sich als Grenzfall behandeln. Ist $X = A_1$ (bzw. $X = A_2$), so ist $Y = A_2$ (bzw. $Y = A_1$) der Fernpunkt in Richtung s und entsprechend $H_1 A_2$ (bzw. $H_2 A_1$) eine Parallelle zur Hauptachse der Parabel durch H_1 (bzw. H_2). Dann ist c_G ein entarteter Kegelschnitt, der aus den beiden Parallelen zu s durch H_1 und H_2 besteht.

(b) Sei $T := \pi_c(s)$, also auch $s = \pi_c(T)$. Dann liegt T auf den Polaren der Punkte von s , insbesondere auf $\pi_c(S)$ und der Polare $\kappa_c(s)$ des Fernpunktes zu s . Also ist $T = \pi_c(S) \cap \kappa_c(s) = H_1 H_2 \cap A_1 A_2$. Nun gilt ([8], S. 74): Die Punkte $H_1 A_2 \cap H_2 A_1 = G$ und $H_1 A_1 \cap H_2 A_2 = G'$ liegen auf s und (P, Q, G, G') ist harmonisch; außerdem: $A = s \cap A_1 A_2$ und $H = s \cap H_1 H_2$ und es gilt: (H, A, G, G') ist harmonisch.

(c) Nach (b) ist $G = H_{G'}(P, Q) = H_{G'}(H, A)$. Wir setzen $p := |SP|$, $q := |SQ|$, $r := |G'S|$, $h := |SH| = H(p, q)$ und $a := |SA| = A(p, q)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} H_{G'}(P, Q) = H_{G'}(H, A) &\Leftrightarrow H(r + p, r + q) = H(r + h, r + a) \\ &\Leftrightarrow \frac{(p + r)(q + r)}{2r + p + q} = \frac{(h + r)(a + r)}{2r + h + a} \\ &\Leftrightarrow (p + r)(q + r)(2r + h + a) = (h + r)(a + r)(2r + p + q) \\ &\Leftrightarrow (pq + (p + q)r + r^2)(2r + h + a) = (ha + (h + a)r + r^2)(2r + p + q). \end{aligned}$$

Nun gilt $h \cdot a = H(p, q) \cdot A(p, q) = p \cdot q$. Damit vereinfacht sich die Gleichung zu

$$(pq - r^2)(h + a - (p + q)) = 0.$$

Wir können $p \neq q$ und damit $h + a \neq p + q$ voraussetzen. Dann ist $pq = r^2$, d.h. $r = G(p, q)$. Aus $|G'G| = r + |SG| = H(r + p, r + q)$ folgt nach einfacher Rechnung

$$|SG| = H(r + p, r + q) - r = \frac{2(r + p)(r + q)}{2r + p + q} - r = r.$$

Also ist $|SG| = G(p, q)$ und damit $G = G_S(P, Q)$. Darüber hinaus sehen wir nun, dass S Mittelpunkt von $G'G$ und damit bei Ellipsen und Hyperbeln Mittelpunkt von c_G ist. \square

4 Schlussbemerkungen

Die Untersuchung offenbart Stärken und Schwächen der verwendeten geometrischen und algebraischen Methoden.

Hinsichtlich des harmonischen Mittels ist die projektive Methode das Mittel der Wahl, denn es steht in engem Zusammenhang zur harmonischen Teilung und damit zu projektiven Eigenschaften der Kegelschnitte. Hier ist es einfach, das Ergebnis vorauszusehen und zu beweisen, sowohl geometrisch wie algebraisch.

Anders beim arithmetischen und geometrischen Mittel. Als hilfreich erweisen sich hier Experimente mit einer dynamischen Geometriesoftware, die Ergebnisse vermuten lassen. Die algebraische Methode eignet sich nun zum Beweis, enthüllt aber naturgemäß weniger deutlich den geometrischen Hintergrund der Ergebnisse.

Die affin-geometrische Methode beruht auf der Tatsache, dass Ellipsen, Parabeln bzw. Hyperbeln jeweils untereinander affin verwandt und dass die diskutierten Mittelwerte affin invariant sind. Es genügt daher, die Ergebnisse jeweils an einem Repräsentanten der drei Kegelschnittarten zu verifizieren. Das ist bei Ellipsen besonders einfach, da man hier lediglich etwas Kreisgeometrie benötigt. Bei Parabeln und Hyperbeln ist allerdings der Zugang über analytische Geometrie einfacher. Beim harmonischen Mittel bringt die affin-geometrische Methode keine Vorteile.

Mit der projektiv-geometrischen Methode profitiert man von der Tatsache, dass alle nicht entarteten Kegelschnitte projektiv untereinander verwandt sind. Für das harmonische Mittel liegt diese Methode, wie bereits erwähnt, besonders nahe. Da das arithmetische und das geometrische Mittel allerdings nicht projektiv invariant sind, ist dort der projektiv-geometrische Weg nicht in gleichem Maß geeignet. Zwar gelingt der Nachweis, dass die Kurven c_A und c_G Kegelschnitte sind, allerdings ohne sie so präzise zu beschreiben wie mit der algebraischen bzw. der affin-geometrischen Methode. Die projektive Methode erfordert darüber hinaus mehr theoretischen Hintergrund. Lediglich bei der Kennzeichnung des geometrischen Mittels in Satz 4 ist die projektiv-geometrische Methode den anderen deutlich überlegen.

Es stellt sich die naheliegende Frage, ob ähnliche Ergebnisse auch für andere Mittelwerte als A , G und H erzielt werden können. Dafür kommen z.B. Verallgemeinerungen wie Lehmer-Mittelwerte, Potenzmittelwerte, gewichtete Formen oder Konvexkombinationen von A , G und H in Frage. Unter diesen Mittelwerten scheinen A , G und H jedoch die einzigen zu sein, für die c_M wieder ein (evtl. ausgearteter) Kegelschnitt ist.

Das Thema kann noch in anderer Richtung verfolgt werden, z.B. im Hinblick auf eine iterative Konstruktion von Lehmer-Mittelwerten ([10]).

Literatur

- [1] Bullen, P.S.: Handbook of Means and their Inequalities. Kluwer Acad. Press, Dordrecht (2003)
- [2] Chasles, M.: Traité des Sections Coniques. Gauthier-Villars, Paris (1865)
- [3] Chasles, M.: Geschichte der Geometrie. Sändig Reprint Verlag. Schaan (1982)
- [4] Doeblemann, K.: Projective Geometrie in synthetischer Behandlung. Sammlung Göschen, Leipzig (1898)
- [5] Coxeter, H.S.M.: Introduction to Geometry. J. Wiley & Sons, New York (1969)
- [6] Fladt, K.: Geschichte und Theorie der Kegelschnitte und der Flächen zweiten Grades. Ernst Klett, Stuttgart (1965)
- [7] Glaeser, G., Stachel, H., Odehnal, B.: The Universe of Conics. Springer, Berlin, Heidelberg (2016)
- [8] Halbeisen, L., Hungerbühler, N., Läuchli, J.: Mit harmonischen Verhältnissen zu Kegelschnitten. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum (2016)
- [9] Hohenwerter, M.: Geogebra – Ein Softwaresystem für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene. Diplomarbeit 2002, https://archive.geogebra.org/static/publications/diplomarbeit_geogebra.pdf (15.10.2017)
- [10] Jäger J.: Geometrische Konstruktionen alter und neuer Mittelwerte (I und II). Die Wurzel 53, Jan. 2019 S. 4–11 und Feb. 2019 S. 26–34
- [11] Pedoe, D.: Geometry a Comprehensive Course. Dover Pub. Inc., New York (1970)
- [12] Schupp, H.: Kegelschnitte. Franzbecker, Hildesheim (2000)

Joachim Jäger
Neugrabenweg 55
D-66123 Saarbrücken
e-mail: hajo.jaeger@t-online.de