Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 75 (2020)

Heft: 3

Rubrik: Aufgaben

Elem. Math. 75 (2020) 129 – 134
0013-6018/20/030129-6
DOI 10.4171/EM/414

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Februar 2021 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1401: Sei F_0 die Fläche des kleinsten, gleichseitigen Dreiecks, welches in einem Dreieck der Fläche F und mit Brocard-Winkel ω einbeschrieben ist. Man zeige

$$F_0 = \frac{F}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \cot(\omega)}.$$

Gheorghe Bercea, München, D

Aufgabe 1402: Man bestimme

$$\lim_{x \to \infty} x^2 \left(\frac{\arctan(x)}{x} - \frac{\arctan(x+1)}{x+1} \right).$$

Dinu Ovidiu-Gabriel, Bălceşti Vâlcea, RO

Aufgabe 1403 (Die einfache dritte Aufgabe): Bei sechs Spielern kann man zwei Jasskarten-Spiele mit vier Farben nach der Entfernung aller 6-er, 7-er und 8-er zu einem Doppelspiel mit 48 Karten zusammenlegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält dann ein Spieler in seinen acht Karten genau vier Bauern verschiedener Farbe?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 2019

Aufgabe 1389. In einem Dreieck ABC mit drei verschieden langen Seiten a, b, c seien s_a, s_b, s_c die Längen der Seitenhalbierenden, w_α, w_β, w_γ die Längen der Winkelhalbierenden und r der Inkreisradius. Man beweise, dass

$$\frac{1}{s_a^2 - w_\alpha^2} \cdot \frac{(b-c)^2}{(b+c)^2} + \frac{1}{s_b^2 - w_\beta^2} \cdot \frac{(c-a)^2}{(c+a)^2} + \frac{1}{s_c^2 - w_\gamma^2} \cdot \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} < \frac{1}{r^2}.$$

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BIH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Beiträge von folgenden 10 Lesern eingetroffen: Hans Brandstetter (Wien, A), Erhard Braune (Linz, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Es liegt auf der Hand, dass man alle Grössen durch die Seitenlängen ausdrückt, da man dann nur noch drei Variablen benötigt. Viele Leser bemerken auch, dass sich die zu beweisende Ungleichung verschärfen lässt. Wir folgen den Ausführungen von *Walther Janous*.

Wir vereinfachen zuerst die linksseitigen auftretenden Summanden mithilfe der bekannten Darstellungen

$$s_a = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \quad \text{und} \quad w_\alpha = \frac{bc}{(b+c)^2}\big((b+c)^2 - a^2)\big)$$

und erhalten

$$\frac{1}{s_a^2 - w_\alpha^2} \cdot \frac{(b-c)^2}{(b+c)^2} = \frac{4}{2(b+c)^2 - a^2}.$$

Insbesondere bleibt die rechte Seite auch für $b = c$ und damit $s_a = w_\alpha$ sinnvoll. Deshalb ist die Summe

$$\Sigma = \frac{4}{2(b+c)^2 - a^2} + \frac{4}{2(c+a)^2 - b^2} + \frac{4}{2(a+b)^2 - c^2}$$

nach oben abzuschätzen, wobei keinerlei Einschränkung für die vorkommenden Dreiecke ABC nötig ist. Wir zeigen nun dass

$$\Sigma \leq \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Mit $r = F/s$, wobei F die Fläche und s den halben Umfang des Dreiecks ABC bezeichnet und der Heronschen Formel ergibt sich

$$r^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$$

und eingesetzt in die äquivalente Ungleichung $\frac{1}{7} - r^2\Sigma \geq 0$

$$\frac{1}{7} - \left(\frac{4}{2(b+c)^2 - a^2} + \frac{4}{2(c+a)^2 - b^2} + \frac{4}{2(a+b)^2 - c^2}\right) \cdot \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} \geq 0.$$

Für ihren Nachweis verwenden wir die sogenannte x-y-z-Transformation, d.h. wir stellen die Seiten a, b, c durch die entsprechenden positiven Grössen $x = s - a$, $y = s - b$, $z = s - c$ dar. Mit $a = y + z$, $b = z + x$ und $c = x + y$ ergibt sich die (algebraische Ungleichung)

$$\frac{1}{7} - \left(\sum_{\text{zykl.}} \frac{4}{2(2x+y+z)^2 - (y+z)^2}\right) \cdot \frac{xyz}{x+y+z} \geq 0,$$

die für alle positiven reellen Zahlen x, y, z gelten soll.

Macht man gleichnamig, so erhält man im Zähler das homogene, symmetrische Polynom $f(x, y, z)$ mit

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = \sum_{\text{symm.}} \big(&8x^7 + 96x^6y + 3x^5(123y^2 + 178yz) + x^4(683y^3 + 217y^2z) \\ &- 2x^3(235y^3z + 1401y^2z^2)\big) \end{aligned}$$

und es bleibt $f(x, y, z) \geq 0$ für positive x, y, z zu zeigen.

Da f symmetrisch ist, dürfen wir $x \leq y \leq z$ annehmen. Damit gibt es nicht negative reelle Zahlen u und v so, dass $y = x + u$ und $z = x + u + v$ sind und man erhält

$$\begin{aligned} f(x, x+u, x+u+v) &= 15008x^5(u^2 + uv + v^2) \\ &+ 32x^4(2u+v)(834u^2 + 834uv + 677v^2) \\ &+ 8x^3\big(9343u^3(u+2v) + 17589u^2v^2 + 8246uv^3 + 1415v^4\big) \\ &+ 4x^2\big(6433u^4(2u+5v) + 34870u^3v^2 + 20140u^2v^3 + 5865uv^4 + 648v^5\big) \\ &+ x\big(17408u^5(u+3v) + 65959u^4v^2 + 44878u^3v^3 + 17071u^2v^4 + 3336uv^5 + 248v^6\big) \\ &+ (2u+v)^3(17u^2 + 10uv + v^2)(17u^2 + 24uv + 8v^2). \end{aligned}$$

Weil nur nicht negative Summanden auftreten, sind wir am Ende des Beweises. Ausserdem gilt die Gleichheit $f(x, y, z) = 0$ nur, falls $u = v = 0$, d.h. falls das Dreieck ABC gleichseitig ist.

Aufgabe 1390. Man bestimme den Wert von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n/2}}{n^2},$$

wobei $H_x = \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}\,dt$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $x > -1$ die verallgemeinerten harmonischen Zahlen sind.

Daniel Fritze, Berlin, D

Auswertung der eingesandten Lösungen.

Folgende 13 Leser haben Beiträge zugesandt: Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Seán Stewart (Bomaderry, AUS), Michael Vowe (Therwil, CH), Hansruedi Widmer (Baden, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Ersetzt man in der gesuchten Reihe $H_{n/2}$ durch H_n, so ergibt sich ein schon seit Euler bekanntes Resultat. Es verwundert deshalb nicht, dass die gesuchte Reihe einen ganz ähnlichen Wert hat. Wir folgen den Ausführungen von *Albert Stadler*, der die auftretenden Integrale geschickt auf die Berechnung einer einzigen Reihe zurückführt.

Wir finden mit partieller Integration die Darstellung

$$H_{n/2} = -\frac{n}{2}\int_0^1 t^{n/2-1}\log(1-t)\,dt.$$

Damit ist die Summe $\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n/2}}{n^2}$ gleich

$$\begin{aligned}\Sigma &= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\int_0^1 t^{n/2-1}\log(1-t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{t}\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}t^{n/2}\right)\log(1-t)\,dt\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{t}\log(1-\sqrt{t})\log(1-t)\,dt \overset{t=u^2}{=} \int_0^1 \frac{1}{u}\log(1-u)\log(1-u^2)\,du,\end{aligned}$$

wobei die Vertauschung von Summation und Integration aufgrund Lebesgues Satz von der majorisierten Konvergenz gestattet ist. Wir finden

$$\begin{aligned}\Sigma &= \int_0^1 \frac{1}{u}\log(1-u)\big(\log(1-u)+\log(1+u)\big)\,du\\ &= \int_0^1 \frac{1}{u}\log^2(1-u)\,du\\ &\quad+\int_0^1 \frac{\big(\log(1-u)+\log(1+u)\big)^2-\big(\log(1-u)-\log(1+u)\big)^2}{4u}\,du\\ &= \int_0^1 \frac{1}{1-u}\log^2(u)\,du+\frac{1}{4}\int_0^1\frac{\log^2(1-u^2)}{u}\,du-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{\log^2\left(\frac{1-u}{1+u}\right)}{u}\,du.\end{aligned}$$

Nun ist

$$\frac{1}{4}\int_0^1\frac{\log^2(1-u^2)}{u}\,du \overset{u=\sqrt{1-v}}{=} \frac{1}{8}\int_0^1\frac{\log^2(v)}{1-v}\,dv$$

und

$$\int_0^1\frac{\log^2\left(\frac{1-u}{1+u}\right)}{4u} \overset{u=\frac{1-v}{1+v}}{=} \int_0^1\frac{\log^2(v)}{2(1-v)(1+v)}\,dv = \int_0^1\frac{\log^2(v)}{4(1-v)}\,dv+\int_0^1\frac{\log^2(v)}{4(1+v)}\,dv.$$

Wir schliessen

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \frac{7}{8}\int_0^1 \frac{\log^2(v)}{1-v}\,dv - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\log^2(v)}{1+v}\,dv \\
&= \frac{7}{8}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 v^k \log^2(v)\,dv - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_0^1 v^k \log^2(v)\,dv \\
&= \frac{7}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k^3} = \frac{7}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^3} = \frac{11}{8}\zeta(3).
\end{aligned}$$

Wiederum ist die Vertauschung von Summation und Integration gestattet und $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ ist die Riemannsche Zetafunktion.

Aufgabe 1391 (Die einfache dritte Aufgabe). Die Felder eines $2 \times n$-Rechtecks G_n ($n \geq 2$) sind so mit natürlichen (positiven) Zahlen zu belegen, dass die Summe der vier Zahlen in jedem Teilquadrat von G_n gleich sieben ist. Man bestimme die Anzahl z_n der möglichen Belegungen.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden 8 Lesern sind Lösungen eingetroffen:

Hans Brandstetter (Wien, A), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Da die selben Zahlenpaare in jeder übernächsten Spalte wieder auftreten, lässt sich relativ leicht eine explizite Formel angeben. Wir folgen den Ausführungen von *Joachim Klose*, der das Problem noch verallgemeinert.

Die Aufgabenstellung etwas verallgemeinernd, ist die Anzahl α_n aller Belegungen der $2 \times n$-Matrix $G_n = (g_{ij})_{1\leq i\leq 2, 1\leq j\leq n}$ mit positiven Zahlen zu bestimmen, für die die Summe der vier Zahlen in jedem 2×2 Teilquadrat von G_n gleich q ist, wobei q eine feste natürliche Zahl grösser oder gleich 4 ist.

Bezeichnet $s_j = g_{1j} + g_{2j}$ ($1 \leq j \leq n$) die Summe der j-ten Spalte von G_n, so lautet die Bedingung für die gesuchten Belegungen: Für jedes $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ ist $q = s_j + s_{j+1}$. Ist $s_1 \in \{2, 3, \ldots, q-2\}$ beliebig ausgewählt, so folgt $s_2 = q - s_1$, $s_3 = s_1$, $s_4 = q - s_1$, usw.

Die Anzahl Paare (a, b) positiver ganzer Zahlen mit $a + b = s \in \{2, 3, \ldots, q-2\}$ ist $s - 1$, denn die möglichen Paare sind $(1, s-1), (2, s-2), \ldots, (s-1, 1)$. Die gesuchte Anzahl α_n ist deshalb

$$\alpha_n = \sum_{s=2}^{q-2}(s-1)^u(q-s-1)^v,$$

wobei $u = \#\{j \in \mathbb{N}_n \mid j \text{ ist ungerade}\}$ und $v = \#\{j \in \mathbb{N}_n \mid j \text{ ist gerade}\}$. Daraus ergibt sich für gerades $n = 2m$ bzw. ungerades $n = 2m+1$

$$\alpha_{2m} = \sum_{s=1}^{q-3} \big(s(q-2-s)\big)^m \quad \text{bzw.} \quad \alpha_{2m+1} = \sum_{s=1}^{q-3} s \cdot \big(s(q-2-s)\big)^m. \tag{1}$$

Für eine endliche Folge reeller Zahlen $b_1, b_2, \dots, b_{p-1}$ mit der Symmetrieeigenschaft $b_i = b_{p-i}$ $(1 \leq i \leq p-1)$ ist

$$A = \sum_{i=1}^{p-1} b_i = \begin{cases} 2 \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{p/2-1} b_i \right) + b_{p/2}, & \text{falls } p \text{ gerade} \\ 2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{(p-1)/2} b_i, & \text{falls } p \text{ ungerade} \end{cases}$$

und wegen $ib_i + (p-i)b_{p-i} = pb_i$ ist

$$B = \sum_{i=1}^{p-1} ib_i = \begin{cases} p \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{p/2-1} b_i \right) + \frac{p}{2} \cdot b_{p/2}, & \text{falls } p \text{ gerade} \\ p \cdot \sum\limits_{i=1}^{(p-1)/2} b_i, & \text{falls } p \text{ ungerade} \end{cases}$$

und es folgt $B = \frac{p}{2} \cdot A$.
Dies auf (1) angewandt liefert für $m \geq 1$ und $q \geq 4$

$$\alpha_{2m} = \begin{cases} 2 \cdot \left(\sum\limits_{s=1}^{q/2-2} \big(s(q-2-s)\big)^{2m} \right) + \left(\frac{q-2}{2}\right)^{2m}, & \text{falls } q \text{ gerade} \\ 2 \cdot \sum\limits_{s=1}^{(q-3)/2} \big(s(q-2-s)\big)^m, & \text{falls } q \text{ ungerade} \end{cases}$$

und $\alpha_{2m+1} = \frac{q-2}{2}\alpha_{2m}$.
Speziell für $q = 7$ folgt für $m \geq 1$

$$\alpha_{2m} = 2 \cdot (4^m + 6^m) \qquad \text{und} \qquad \alpha_{2m+1} = \tfrac{5}{2}\alpha_{2m} = 5 \cdot (4^m + 6^m).$$