

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 75 (2020)
Heft: 2

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 18.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. November 2020 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1398: In Bildern von Max Bill treten kongruente Quadrate $ABCD$ und $PQRS$ auf, bei denen P auf AB und C auf QR liegt.

- Die durch die beiden Quadrate gebildete Figur enthält sechs rechtwinklige Dreiecke. Welche Seitenverhältnisse haben sie, wenn P wie bei Bill in der Mitte von AB liegt?
- Sei F der Fusspunkt des Lots von Q auf BC . In welchem Verhältnis wird BC von F geteilt, wenn die Länge von FQ maximal ist?
- Welche Art von Kurve beschreibt Q , wenn P entlang AB läuft.

Moritz Adelmeyer, Zürich, CH und Fritz Siegerist, Küsnacht, CH

Aufgabe 1399: In einem Dreieck ABC mit den Winkelhalbierenden w_α , w_β , w_γ zeige man die Identität

$$\left(\frac{\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})}{w_\gamma}\right)^3 + \left(\frac{\sin(\frac{\beta-\gamma}{2})}{w_\alpha}\right)^3 + \left(\frac{\sin(\frac{\gamma-\alpha}{2})}{w_\beta}\right)^3 = \frac{3}{8abc} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) \left(\frac{b}{c} - \frac{c}{b}\right) \left(\frac{c}{a} - \frac{a}{c}\right).$$

Oleh Faynshteyn, Leipzig, D

Aufgabe 1400 (Die einfache dritte Aufgabe): Der Restklassenkörper $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ kann durch Adjunktion des Elements $\sqrt{2}$ zum Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5(\sqrt{2})$ mit 25 Elementen erweitert werden. Man suche alle Lösungen der Gleichung $x^3 = 2$ in \mathbb{K} .

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 2, 2019

Aufgabe 1386. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $a \neq b$ und Umkreis k . Die Punkte $E \in BC$ und $F \in CA$ seien die Höhenfusspunkte der Höhen h_a resp. h_b und N der Mittelpunkt von EF . Weiter schneide die Gerade CN den Umkreis in Z und U , V seien die von Z verschiedenen Schnittpunkte $ZE \cap k$ resp. $ZF \cap k$. Schliesslich sei P der Schnittpunkt der Geraden AU und BV . Zeige, dass sich die Geraden UV und AB auf der Tangente im Punkt P an den Umkreis des Dreiecks CPN schneiden.

Andrew Wu, McLean, USA

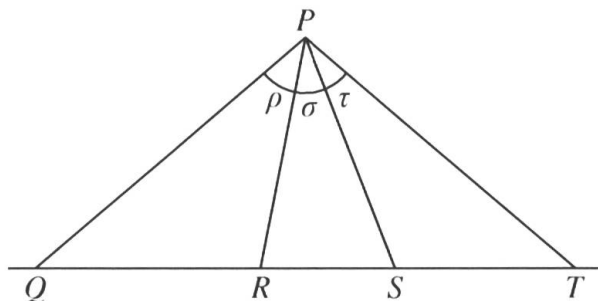
Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden 6 Lesern sind Beiträge eingetroffen: Henri Carnal (Bern, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH) und Lienhard Wimmer (Isny, D).

Während sich die Aufgabe mit analytischen Methoden nachrechnen lässt, ist ein synthetischer Beweis recht aufwändig. Wir folgen den Ausführungen von *Henri Carnal*, der als einziger diese Methode gewählt hat.

Das Doppelverhältnis $(Q, R; S, T)$ ist definiert als

$$\pm \frac{SQ}{SR} : \frac{TQ}{TR} = \pm \frac{\sin(\rho + \sigma)}{\sin(\sigma)} : \frac{\sin(\rho + \sigma + \tau)}{\sin(\sigma + \tau)},$$

+ falls S und T beide ausserhalb oder innerhalb der Strecke QR liegen, – sonst (siehe Figur 1).



Figur 1

In Figur 2 ist O der Umkreismittelpunkt, H der Höhenschnittpunkt und G der Fusspunkt der Höhe h_c . Weiter ist r der Umkreisradius und man nimmt $b > a$ an. Man schreibt $\bar{\alpha} = 90^\circ - \alpha$ usw., $k_1 = \tan(\bar{\alpha})$, $k_2 = \tan(\bar{\beta})$, $p = k_1 k_2$. Es ist $\sphericalangle ACC_1 = \bar{\beta} = \sphericalangle BCG$, $\bar{\alpha} = \sphericalangle BCC_1 = \sphericalangle ABF = \sphericalangle ACJ = \sphericalangle ABJ$ usw. Wegen $\triangle CEF \sim \triangle CAB$ und $\sphericalangle BCC_1 = \bar{\alpha}$ ist $EF \perp CC_1$. Ist N der Mittelpunkt von FE , $\varphi = \sphericalangle OCN$, so ist

$$\tan(\varphi) = \frac{DE - DF}{2CD} = \frac{k_1 - k_2}{2}. \quad (1)$$

Sei $K = EF \cap h_c$. Es gilt $CK = \frac{CE \cos(\bar{\alpha})}{\cos(\bar{\alpha} - \beta)} = \frac{CE \sin(\alpha)}{\cos(\beta - \alpha)}$ und $CH = \frac{CE}{\cos(\beta)} = \frac{CE}{\sin(\beta)}$.

Daraus folgt $HK = CH - CK = CE \left(\frac{1}{\sin(\beta)} - \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\beta - \alpha)} \right) = \frac{CE \cos(\alpha) \cos(\beta)}{\sin(\beta) \cos(\beta - \alpha)}$ und weiter

$$CK : HK = \frac{\sin(\alpha) \sin(\beta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)}.$$

Im Büschel mit Scheitel Z ist $\sphericalangle BZC = \alpha$, $\sphericalangle BZL = 180^\circ - \sphericalangle BCL = \overline{\gamma - \alpha}$. Wir schreiben noch $\sphericalangle CZV = \varepsilon$, $\sphericalangle VZL = \delta$ und haben $(B, F; N_1, L) = -\frac{\sin(\alpha) \sin(\delta)}{\sin(\varepsilon) \cos(\gamma - \alpha)}$. Aus (3) folgt deshalb

$$\frac{\sin(\delta)}{\sin(\varepsilon)} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\beta)}. \quad (4)$$

Zum Schluss projiziert man das Doppelpaar $\{C, L, V, A\}$ von B aus auf h_c zu $\{C, H, P_1, G\}$ (mit $P_1 = BV \cap h_c$) und erhält

$$(C, H; P_1, G) = -\frac{\sin(\varepsilon) \cos(\alpha)}{\sin(\delta) \sin(\beta)} \stackrel{(4)}{=} -1.$$

Aus (2) folgt $P_1 = K$ und aus Symmetriegründen gilt auch $AU \cap h_c = K$, also $P = AU \cap BV = K$.

Für $\rho = \sphericalangle B A U$ gilt $\tan(\rho) = \frac{GK}{GA}$ mit $GK = h_c - CK = h_c - \frac{CE \sin(\alpha)}{\cos(\beta - \alpha)}$. Aus $CE = 2r \sin(\beta) \cos(\gamma)$ folgt $CK = \frac{h_c \cos(\gamma)}{\cos(\beta - \alpha)}$ und $GK = h_c \left(1 - \frac{\cos(\gamma)}{\cos(\beta - \alpha)}\right) = h_c \cdot \frac{2p}{1+p}$. Weiter ist $GA = 2r \cos(\alpha) \sin(\beta) = \frac{h_c \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = h_c \cdot k_1$ und schliesslich $\tan(\rho) = \frac{2p}{(1+p)k_1} = \frac{2k_2}{1+p}$. Ähnlich gilt für $\sigma = \sphericalangle A B V$, dass $\tan(\sigma) = \frac{GK}{GB} = \frac{2k_1}{1+p}$.

Für $\tau = \sphericalangle A W V = \sphericalangle A U V - \sphericalangle B A U = \sigma - \rho$ hat man dann

$$\tan(\tau) = \frac{\tan(\sigma) - \tan(\rho)}{1 + \tan(\sigma) \tan(\rho)} = \frac{2(k_1 - k_2)(1 + p)}{1 + 6p + p^2}. \quad (5)$$

Für $\omega = \sphericalangle G W K$ gilt schliesslich mit $Y = UV \cap h_c$

$$\frac{\tan(\omega)}{\tan(\tau)} = \frac{KG}{YG} \Rightarrow \tan(\omega) = \tan(\tau) \frac{KG}{YG}. \quad (6)$$

Es ist $KJ = KG + GJ = KG + HG$ mit $KG = h_c \cdot \frac{2p}{1+p}$ und $HG = 2r \cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{h_c \cos(\alpha) \cos(\beta)}{\sin(\alpha) \sin(\beta)} = h_c \cdot p$ und daher $KJ = h_c \cdot \frac{p(3+p)}{1+p}$. Wegen $KC = \frac{h_c \cos(\gamma)}{\cos(\beta - \alpha)} = h_c \cdot \frac{1-p}{1+p}$ ist dann

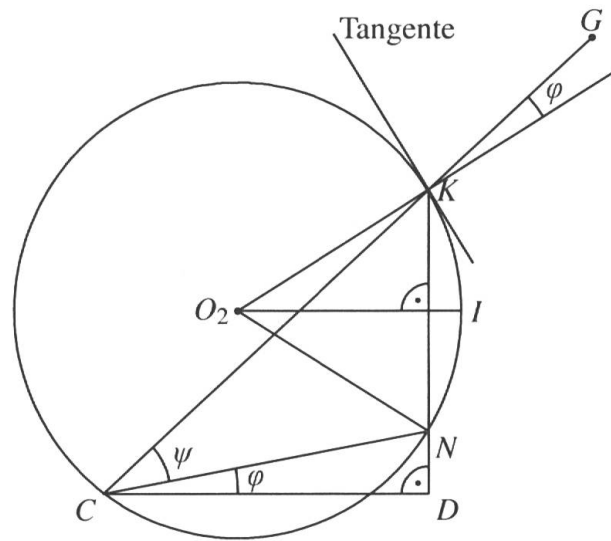
$$(C, J; K, G) = \frac{1-p}{3+p}.$$

Projiziert man nun $\{C, J, K, G\}$ von A aus auf k zu $\{C, J, U, B\}$, dann von V aus auf h_c zu $\{C, J, Y, K\}$, so ist $(C, J; K, G) = (C, J; Y, K)$, d.h.

$$\frac{1-p}{3+p} = \frac{CY}{JY} \cdot \frac{KJ}{KC} = \frac{CY}{JY} \cdot \frac{p(3+p)}{1-p} \Rightarrow \frac{CY}{JY} = \frac{(1-p)^2}{p(3+p)^2}.$$

Wegen $(1-p)^2 + p(3+p)^2 = (1+6p+p^2)(1+p)$ und $CJ = h_c \cdot (1+p)$ gilt $CY = h_c \cdot \frac{(1-p)^2}{1+6p+p^2}$, $YJ = h_c \cdot \frac{p(3+p)^2}{1+6p+p^2}$, $YG = h_c - CY = h_c \cdot \frac{8p}{1+6p+p^2}$ und

$$\frac{KG}{YG} = \frac{1+6p+p^2}{4(1+p)}.$$



Figur 3

Mit (5) und (6) ergibt sich

$$\tan(\omega) = \frac{k_1 - k_2}{2} = \tan(\varphi) \Rightarrow \angle GKW = \bar{\varphi}. \quad (7)$$

Sei O_2 der Mittelpunkt des Kreises CNK (siehe Figur 3) und O_2I die Senkrechte auf NK , dann ist $\angle IO_2K = \angle NCK = \psi$, und da $O_2I \parallel CD$ bildet h_c mit dem Radius O_2K den Winkel φ und somit mit der Tangente den Winkel $\bar{\varphi}$. Nach (7) ist daher diese Tangente die Gerade durch K und W , w.z.b.w.

Bemerkung: Mit dem Satz von Pascal für die Punkte $ZUACBV$ (in dieser Reihenfolge) lässt sich einfach zeigen, dass P auf der Strecke EF liegt (Gerhard Wanner), für den Beweis wird aber benötigt, dass P auf der Höhe h_c liegt, was einiges aufwändiger zu zeigen ist.

Aufgabe 1387. Es sei für eine komplexe Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$S = a + d$ deren Spur und $D = ad - bc$ deren Determinante. Man stelle für natürliches n die Spur der Matrix A^n als Polynom von S und D dar.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 16 Zuschriften von folgenden Lesern eingegangen: Ulrich Abel (Friedberg, D), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Paul Jolissaint (Porrentruy, CH), Joachim Klose (Bonn, D), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht,

CH), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH) und Hansruedi Widmer (Baden, CH).

Die meisten Leser arbeiten mit den Eigenwerten der Matrix, andere leiten eine Rekursionsformel der gesuchten Polynome her. Wir folgen den Ausführungen von *Gerhard Wanner*, der mit einfachen Mitteln explizite Formeln für die Koeffizienten der gesuchten Polynome findet.

Wenn wir mit x, y die beiden Eigenwerte der Matrix A bezeichnen, dann ist $S = x + y$ und $D = xy$ und die Spur von A^n ist gleich $p_n = x^n + y^n$. Jetzt sehen wir (Newton sei Dank):

$$\begin{aligned} p_1 &= S, \\ p_2 &= x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = S^2 - 2D, \\ p_{n+1} &= x^{n+1} + y^{n+1} = (x + y)(x^n + y^n) - xy(x^{n-1} + y^{n-1}) = Sp_n - Dp_{n-1}. \end{aligned}$$

Mit der letzten Rekursionsformel können wir die p_n der Reihe nach berechnen und schreiben die Koeffizienten (ohne Vorzeichen) so in ein Dreieckschema, dass in Richtung \swarrow die Multiplikation mit S , in Richtung \searrow die Multiplikation mit D entspricht. Die Koeffizienten der einzelnen Polynome sind dann nicht in horizontalen Reihen, sondern je von einer Zahl zur Zahl in der nächsten Kolonne der darüber stehenden Reihe zu finden. Als Beispiel sind die Koeffizienten von p_4 grau geschrieben.

$$\begin{aligned} p_1 &= S \\ p_2 &= S^2 - 2D \\ p_3 &= S^3 - 3SD \\ p_4 &= S^4 - 4S^2D + 2D^2 \\ p_5 &= S^5 - 5S^3D + 5SD^2 \\ p_6 &= S^6 - 6S^4D + 9S^2D^2 - 2D^3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} & & 1 & 2 & & \\ & & & 1 & 3 & 2 \\ & & & & 1 & 4 & 5 & 2 \\ & & 1 & 5 & 9 & 7 & 2 \\ & & & & & \dots & \end{bmatrix}$$

Das Bildungsgesetz dieser Koeffizienten ist abgesehen von der ersten Reihe genau gleich wie beim Pascalschen Dreieck. Deshalb ist dieses Dreieck die Summe der von den Zahlen 1 und 2 in der ersten Zeile erzeugten Pascalschen Dreiecke.

$$\begin{bmatrix} & & 1 & 2 & & \\ & & & 1 & 3 & 2 \\ & & & & 1 & 4 & 5 & 2 \\ & & 1 & 5 & 9 & 7 & 2 \\ & & & & & \dots & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & 1 & & & \\ & & & 1 & 1 & \\ & & 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ & & & \dots & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & & 2 & & \\ & & & & 2 & 2 \\ & & 2 & 4 & 2 & \\ & 2 & 6 & 6 & 2 & \\ & & & \dots & \end{bmatrix}$$

Mit der Identität $\binom{n}{k} + 2\binom{n}{k-1} = \frac{n+k+1}{n+1}\binom{n+1}{k}$ lässt sich die Summe als

$$\begin{bmatrix} & & 1 & 2 & & \\ & & & 1 & 3 & 2 \\ & & & & 1 & 4 & 5 & 2 \\ & & 1 & 5 & 9 & 7 & 2 \\ & & & & & \dots & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & \frac{1}{1} \cdot 1 & \frac{2}{1} \cdot 1 & & \\ & & & & \frac{2}{2} \cdot 1 & \frac{3}{2} \cdot 2 & \frac{4}{2} \cdot 1 & \\ & & & \frac{3}{3} \cdot 1 & \frac{4}{3} \cdot 3 & \frac{5}{3} \cdot 3 & \frac{6}{3} \cdot 1 & \\ & & \frac{4}{4} \cdot 1 & \frac{5}{4} \cdot 4 & \frac{6}{4} \cdot 6 & \frac{7}{4} \cdot 4 & \frac{8}{4} \cdot 1 & \\ \frac{5}{5} \cdot 1 & \frac{6}{5} \cdot 5 & \frac{7}{5} \cdot 10 & \frac{8}{5} \cdot 10 & \frac{9}{5} \cdot 5 & \frac{10}{5} \cdot 1 & & \\ & & & \dots & & & & \end{bmatrix}$$

schreiben und wir erhalten schliesslich

$$p_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} S^{n-2k} D^k.$$

Aufgabe 1388 (Die einfache dritte Aufgabe). Die Beziehung

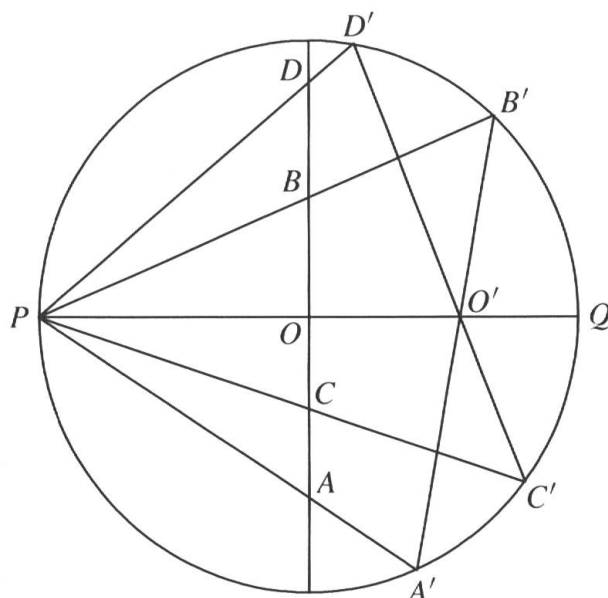
$$A'O' \cdot B'O' = D'O' \cdot C'O'$$

(siehe Figur) heisst Eukl. III.35 und ist seit über 2300 Jahren bekannt. Weniger populär ist dagegen das ähnliche Resultat

$$AO \cdot BO = DO \cdot CO.$$

Gefragt ist ein möglichst eleganter Beweis, eventuell mit Literaturzitaten.

Gerhard Wanner, Genève, CH



Auswertung der eingesandten Lösungen. Folgende 9 Leser haben Lösungen eingesandt: Yagub Aliyev (Khyrdalan, AZ), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Raphael Muhr (Oberammergau, D), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die meisten Löser arbeiten mit einfachen trigonometrischen Hilfsmitteln oder mit ähnlichen Dreiecken. Wir folgen den Ausführungen von *Raphael Muhr*, der mit minimalen Mitteln auskommt.

Wir tragen noch die Endpunkte P und Q des Durchmessers durch O und O' ein. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke PAO und PQA' resp. PBO und PQB' sehen wir, dass

$$AO = PO \cdot \frac{A'Q}{A'P} \text{ und } BO = PO \cdot \frac{B'Q}{B'P} \Rightarrow AO \cdot BO = PO^2 \cdot \frac{A'Q \cdot B'Q}{A'P \cdot B'P}.$$

Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $B'QO'$ und $PA'O'$ resp. $A'QO'$ und $PB'O'$ ist

$$\frac{B'Q}{A'P} = \frac{QO'}{A'O'} \text{ und } \frac{A'Q}{B'P} = \frac{A'O'}{PO'} \Rightarrow \frac{A'Q \cdot B'Q}{A'P \cdot B'P} = \frac{QO'}{PO'}.$$

Somit ist

$$AO \cdot BO = PO^2 \cdot \frac{QO'}{PO'}$$

konstant für jeden festen Punkt O' .