

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 75 (2020)  
**Heft:** 2  
  
**Rubrik:** Aufgaben

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

---

## Aufgaben

---

### Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. November 2020 erbeten und können auf postalischem Weg an  
Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH-8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse [stefan.grieder@hispeed.ch](mailto:stefan.grieder@hispeed.ch) eingereicht werden.

**Aufgabe 1398:** In Bildern von Max Bill treten kongruente Quadrate  $ABCD$  und  $PQRS$  auf, bei denen  $P$  auf  $AB$  und  $C$  auf  $QR$  liegt.

- Die durch die beiden Quadrate gebildete Figur enthält sechs rechtwinklige Dreiecke. Welche Seitenverhältnisse haben sie, wenn  $P$  wie bei Bill in der Mitte von  $AB$  liegt?
- Sei  $F$  der Fußpunkt des Lots von  $Q$  auf  $BC$ . In welchem Verhältnis wird  $BC$  von  $F$  geteilt, wenn die Länge von  $FQ$  maximal ist?
- Welche Art von Kurve beschreibt  $Q$ , wenn  $P$  entlang  $AB$  läuft.

Moritz Adelmeyer, Zürich, CH und Fritz Siegerist, Küsnacht, CH

**Aufgabe 1399:** In einem Dreieck  $ABC$  mit den Winkelhalbierenden  $w_\alpha$ ,  $w_\beta$ ,  $w_\gamma$  zeige man die Identität

$$\left(\frac{\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})}{w_\gamma}\right)^3 + \left(\frac{\sin(\frac{\beta-\gamma}{2})}{w_\alpha}\right)^3 + \left(\frac{\sin(\frac{\gamma-\alpha}{2})}{w_\beta}\right)^3 = \frac{3}{8abc} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) \left(\frac{b}{c} - \frac{c}{b}\right) \left(\frac{c}{a} - \frac{a}{c}\right).$$

Oleh Faynshteyn, Leipzig, D

**Aufgabe 1400 (Die einfache dritte Aufgabe):** Der Restklassenkörper  $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  kann durch Adjunktion des Elements  $\sqrt{2}$  zum Körper  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5(\sqrt{2})$  mit 25 Elementen erweitert werden. Man suche alle Lösungen der Gleichung  $x^3 = 2$  in  $\mathbb{K}$ .

Roland Wyss, Flumenthal, CH

### Lösungen zu den Aufgaben in Heft 2, 2019

**Aufgabe 1386.** Sei  $ABC$  ein spitzwinkliges Dreieck mit  $a \neq b$  und Umkreis  $k$ . Die Punkte  $E \in BC$  und  $F \in CA$  seien die Höhenfußpunkte der Höhen  $h_a$  resp.  $h_b$  und  $N$  der Mittelpunkt von  $EF$ . Weiter schneide die Gerade  $CN$  den Umkreis in  $Z$  und  $U, V$  seien die von  $Z$  verschiedenen Schnittpunkte  $ZE \cap k$  resp.  $ZF \cap k$ . Schliesslich sei  $P$  der Schnittpunkt der Geraden  $AU$  und  $BV$ . Zeige, dass sich die Geraden  $UV$  und  $AB$  auf der Tangente im Punkt  $P$  an den Umkreis des Dreiecks  $CPN$  schneiden.

Andrew Wu, McLean, USA

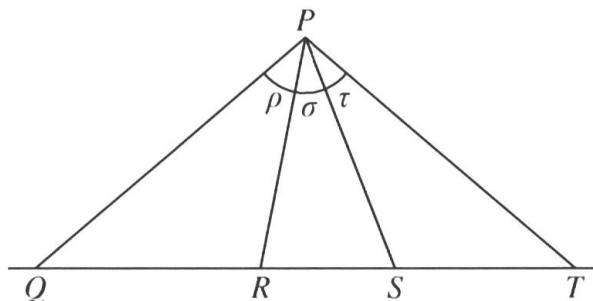
**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Von folgenden 6 Lesern sind Beiträge eingetroffen: Henri Carnal (Bern, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Fritz Siegerist (Küs-nacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH) und Lienhard Wimmer (Isny, D).

Während sich die Aufgabe mit analytischen Methoden nachrechnen lässt, ist ein synthetischer Beweis recht aufwändig. Wir folgen den Ausführungen von *Henri Carnal*, der als einziger diese Methode gewählt hat.

Das Doppelverhältnis  $(Q, R; S, T)$  ist definiert als

$$\pm \frac{SQ}{SR} : \frac{TQ}{TR} = \pm \frac{\sin(\rho + \sigma)}{\sin(\sigma)} : \frac{\sin(\rho + \sigma + \tau)}{\sin(\sigma + \tau)},$$

+ falls  $S$  und  $T$  beide ausserhalb oder innerhalb der Strecke  $QR$  liegen, – sonst (siehe Figur 1).



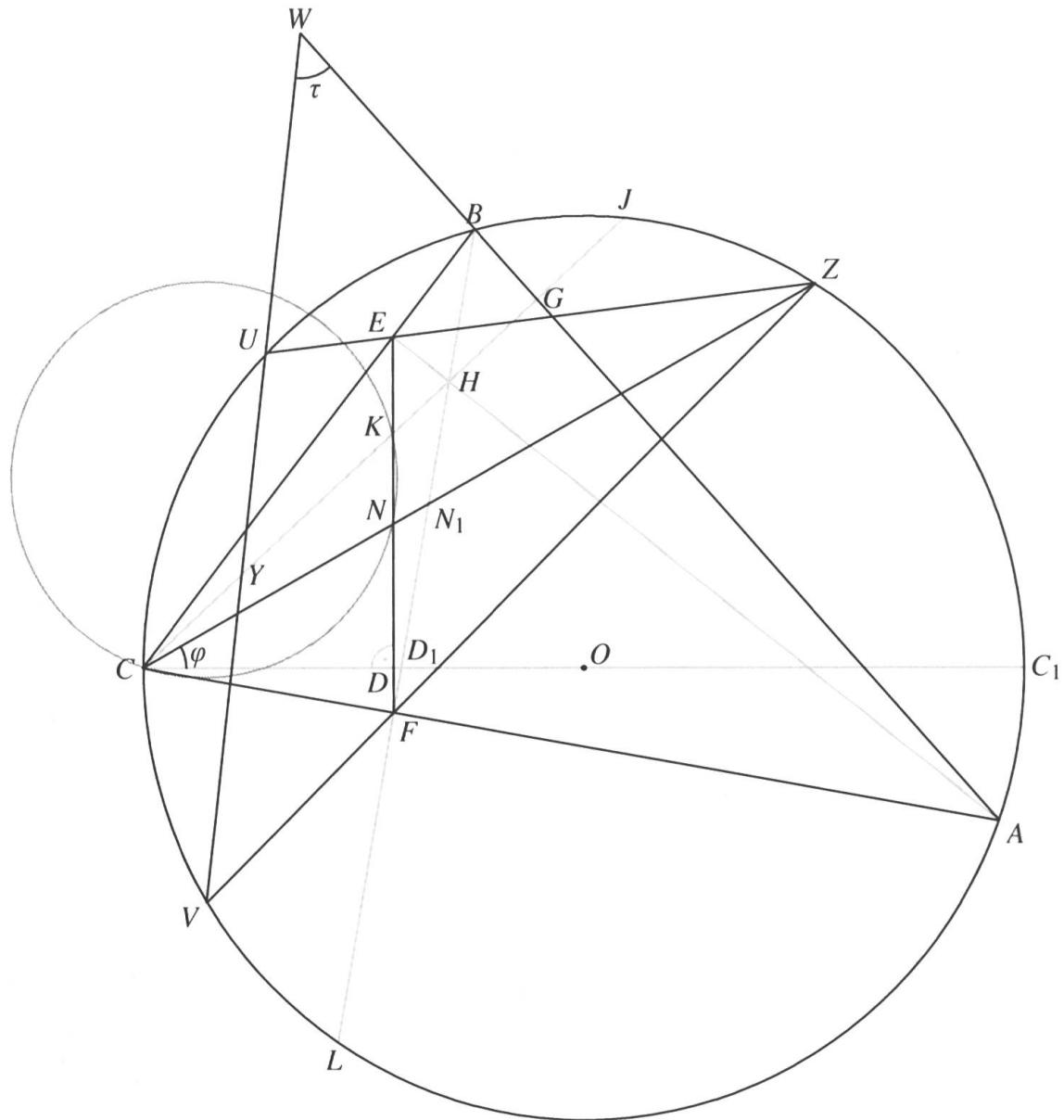
Figur 1

In Figur 2 ist  $O$  der Umkreismittelpunkt,  $H$  der Höhenschnittpunkt und  $G$  der Fußpunkt der Höhe  $h_c$ . Weiter ist  $r$  der Umkreisradius und man nimmt  $b > a$  an. Man schreibt  $\bar{\alpha} = 90^\circ - \alpha$  usw.,  $k_1 = \tan(\bar{\alpha})$ ,  $k_2 = \tan(\bar{\beta})$ ,  $p = k_1 k_2$ . Es ist  $\angle ACC_1 = \bar{\beta} = \angle BCG$ ,  $\bar{\alpha} = \angle BCC_1 = \angle ABF = \angle ACJ = \angle ABJ$  usw. Wegen  $\triangle CEF \sim \triangle CAB$  und  $\angle BCC_1 = \bar{\alpha}$  ist  $EF \perp CC_1$ . Ist  $N$  der Mittelpunkt von  $FE$ ,  $\varphi = \angle OCN$ , so ist

$$\tan(\varphi) = \frac{DE - DF}{2CD} = \frac{k_1 - k_2}{2}. \quad (1)$$

Sei  $K = EF \cap h_c$ . Es gilt  $CK = \frac{CE \cos(\bar{\alpha})}{\cos(\bar{\alpha} - \bar{\beta})} = \frac{CE \sin(\alpha)}{\cos(\beta - \alpha)}$  und  $CH = \frac{CE}{\cos(\beta)} = \frac{CE}{\sin(\beta)}$ .

Daraus folgt  $HK = CH - CK = CE \left( \frac{1}{\sin(\beta)} - \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\beta - \alpha)} \right) = \frac{CE \cos(\alpha) \cos(\beta)}{\sin(\beta) \cos(\beta - \alpha)}$  und weiter  $CK : HK = \frac{\sin(\alpha) \sin(\beta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)}$ .



Figur 2

Es gilt  $BG = 2r \sin(\alpha) \cos(\beta)$  und  $HG = BG \tan(\bar{\alpha}) = 2r \cos(\alpha) \cos(\beta)$ , sowie  $CG = h_c = 2r \sin(\alpha) \sin(\beta)$  und daraus  $CG : HG = CK : HK$  oder

$$(C, H; K, G) = -1. \quad (2)$$

Im Büschel mit Scheitel  $C$  ist  $\sphericalangle BCD_1 = \bar{\alpha}$ ,  $\sphericalangle D_1CF = \bar{\beta}$ ,  $\sphericalangle FCL = \bar{\alpha}$  und daher  $\sphericalangle BCL = \gamma + \bar{\alpha} = \overline{\alpha - \gamma}$ . Daraus erhält man  $(B, F; D_1, L) = -\frac{\cos^2(\alpha)}{\cos(\beta)\cos(\alpha - \gamma)}$ .

Ferner ist  $(B, F; N_1, D_1) = (E, F; N, D) = \frac{DF}{DE} = \frac{\tan(\bar{\beta})}{\tan(\bar{\alpha})} = \frac{\sin(\alpha) \cos(\beta)}{\cos(\alpha) \sin(\beta)}$ . Daraus erhält man

$$(B, F; N_1, L) = (B, F; N_1, D_1)(B, F; D_1, L) = -\frac{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{\sin(\beta)\cos(\alpha - \gamma)}. \quad (3)$$

Im Büschel mit Scheitel  $Z$  ist  $\angle BZC = \alpha$ ,  $\angle BZL = 180^\circ - \angle BCL = \overline{\gamma - \alpha}$ . Wir schreiben noch  $\angle CZV = \varepsilon$ ,  $\angle VZL = \delta$  und haben  $(B, F; N_1, L) = -\frac{\sin(\alpha)\sin(\delta)}{\sin(\varepsilon)\cos(\gamma - \alpha)}$ . Aus (3) folgt deshalb

$$\frac{\sin(\delta)}{\sin(\varepsilon)} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\beta)}. \quad (4)$$

Zum Schluss projiziert man das Doppelpaar  $\{C, L, V, A\}$  von  $B$  aus auf  $h_c$  zu  $\{C, H, P_1, G\}$  (mit  $P_1 = BV \cap h_c$ ) und erhält

$$(C, H; P_1, G) = -\frac{\sin(\varepsilon)\cos(\alpha)}{\sin(\delta)\sin(\beta)} \stackrel{(4)}{=} -1.$$

Aus (2) folgt  $P_1 = K$  und aus Symmetriegründen gilt auch  $AU \cap h_c = K$ , also  $P = AU \cap BV = K$ .

Für  $\rho = \angle BAU$  gilt  $\tan(\rho) = \frac{GK}{GA}$  mit  $GK = h_c - CK = h_c - \frac{CE \sin(\alpha)}{\cos(\beta - \alpha)}$ . Aus  $CE = 2r \sin(\beta) \cos(\gamma)$  folgt  $CK = \frac{h_c \cos(\gamma)}{\cos(\beta - \alpha)}$  und  $GK = h_c \left(1 - \frac{\cos(\gamma)}{\cos(\beta - \alpha)}\right) = h_c \cdot \frac{2p}{1+p}$ . Weiter ist  $GA = 2r \cos(\alpha) \sin(\beta) = \frac{h_c \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = h_c \cdot k_1$  und schliesslich  $\tan(\rho) = \frac{2p}{(1+p)k_1} = \frac{2k_2}{1+p}$ . Ähnlich gilt für  $\sigma = \angle ABV$ , dass  $\tan(\sigma) = \frac{GK}{GB} = \frac{2k_1}{1+p}$ .

Für  $\tau = \angle AWV = \angle AUV - \angle BAU = \sigma - \rho$  hat man dann

$$\tan(\tau) = \frac{\tan(\sigma) - \tan(\rho)}{1 + \tan(\sigma)\tan(\rho)} = \frac{2(k_1 - k_2)(1 + p)}{1 + 6p + p^2}. \quad (5)$$

Für  $\omega = \angle GWK$  gilt schliesslich mit  $Y = UV \cap h_c$

$$\frac{\tan(\omega)}{\tan(\tau)} = \frac{KG}{YG} \quad \Rightarrow \quad \tan(\omega) = \tan(\tau) \frac{KG}{YG}. \quad (6)$$

Es ist  $KJ = KG + GJ = KG + HG$  mit  $KG = h_c \cdot \frac{2p}{1+p}$  und  $HG = 2r \cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{h_c \cos(\alpha) \cos(\beta)}{\sin(\alpha) \sin(\beta)} = h_c \cdot p$  und daher  $KJ = h_c \cdot \frac{p(3+p)}{1+p}$ . Wegen  $KC = \frac{h_c \cos(\gamma)}{\cos(\beta - \alpha)} = h_c \cdot \frac{1-p}{1+p}$  ist dann

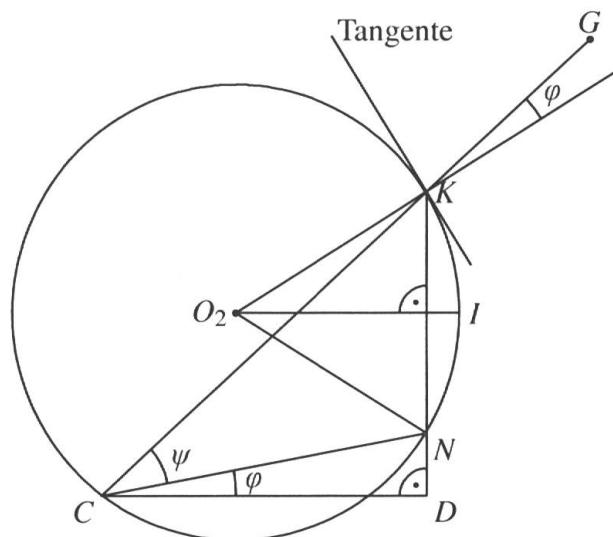
$$(C, J; K, G) = \frac{1-p}{3+p}.$$

Projiziert man nun  $\{C, J, K, G\}$  von  $A$  aus auf  $k$  zu  $\{C, J, U, B\}$ , dann von  $V$  aus auf  $h_c$  zu  $\{C, J, Y, K\}$ , so ist  $(C, J; K, G) = (C, J; Y, K)$ , d.h.

$$\frac{1-p}{3+p} = \frac{CY}{JY} \cdot \frac{KJ}{KC} = \frac{CY}{JY} \cdot \frac{p(3+p)}{1-p} \quad \Rightarrow \quad \frac{CY}{JY} = \frac{(1-p)^2}{p(3+p)^2}.$$

Wegen  $(1-p)^2 + p(3+p)^2 = (1+6p+p^2)(1+p)$  und  $CJ = h_c \cdot (1+p)$  gilt  $CY = h_c \cdot \frac{(1-p)^2}{1+6p+p^2}$ ,  $JY = h_c \cdot \frac{p(3+p)^2}{1+6p+p^2}$ ,  $YG = h_c - CY = h_c \cdot \frac{8p}{1+6p+p^2}$  und

$$\frac{KG}{YG} = \frac{1+6p+p^2}{4(1+p)}.$$



Figur 3

Mit (5) und (6) ergibt sich

$$\tan(\omega) = \frac{k_1 - k_2}{2} = \tan(\varphi) \quad \Rightarrow \sphericalangle GKW = \bar{\varphi}. \quad (7)$$

Sei  $O_2$  der Mittelpunkt des Kreises  $CNK$  (siehe Figur 3) und  $O_2I$  die Senkrechte auf  $NK$ , dann ist  $\angle IO_2K = \angle NCK = \psi$ , und da  $O_2I \parallel CD$  bildet  $h_c$  mit dem Radius  $O_2K$  den Winkel  $\varphi$  und somit mit der Tangente den Winkel  $\bar{\varphi}$ . Nach (7) ist daher diese Tangente die Gerade durch  $K$  und  $W$ , w.z.b.w.

Bemerkung: Mit dem Satz von Pascal für die Punkte  $ZUACBV$  (in dieser Reihenfolge) lässt sich einfach zeigen, dass  $P$  auf der Strecke  $EF$  liegt (*Gerhard Wanner*), für den Beweis wird aber benötigt, dass  $P$  auf der Höhe  $h_c$  liegt, was einiges aufwändiger zu zeigen ist.

**Aufgabe 1387.** Es sei für eine komplexe Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$S = a + d$  deren Spur und  $D = ad - bc$  deren Determinante. Man stelle für natürliches  $n$  die Spur der Matrix  $A^n$  als Polynom von  $S$  und  $D$  dar.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 16 Zuschriften von folgenden Lesern eingegangen: Ulrich Abel (Friedberg, D), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Paul Jolissaint (Porrentruy, CH), Joachim Klose (Bonn, D), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht,

CH), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH) und Hansruedi Widmer (Baden, CH).

Die meisten Leser arbeiten mit den Eigenwerten der Matrix, andere leiten eine Rekursionsformel der gesuchten Polynome her. Wir folgen den Ausführungen von *Gerhard Wanner*, der mit einfachen Mitteln explizite Formeln für die Koeffizienten der gesuchten Polynome findet.

Wenn wir mit  $x, y$  die beiden Eigenwerte der Matrix  $A$  bezeichnen, dann ist  $S = x + y$  und  $D = xy$  und die Spur von  $A^n$  ist gleich  $p_n = x^n + y^n$ . Jetzt sehen wir (Newton sei Dank):

$$\begin{aligned} p_1 &= S, \\ p_2 &= x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = s^2 - 2D, \\ p_{n+1} &= x^{n+1} + y^{n+1} = (x + y)(x^n + y^n) - xy(x^{n-1} + y^{n-1}) = Sp_n - Dp_{n-1}. \end{aligned}$$

Mit der letzten Rekursionsformel können wir die  $p_n$  der Reihe nach berechnen und schreiben die Koeffizienten (ohne Vorzeichen) so in ein Dreieckschema, dass in Richtung  $\swarrow$  die Multiplikation mit  $S$ , in Richtung  $\searrow$  die Multiplikation mit  $D$  entspricht. Die Koeffizienten der einzelnen Polynome sind dann nicht in horizontalen Reihen, sondern je von einer Zahl zur Zahl in der nächsten Kolonne der darüber stehenden Reihe zu finden. Als Beispiel sind die Koeffizienten von  $p_4$  grau geschrieben.

$$\begin{array}{ll} p_1 = S & \\ p_2 = S^2 - 2D & \\ p_3 = S^3 - 3SD & \\ p_4 = S^4 - 4S^2D + 2D^2 & \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 9 & 7 & 2 \\ \dots & & & & \end{bmatrix} \\ p_5 = S^5 - 5S^3D + 5SD^2 & \\ p_6 = S^6 - 6S^4D + 9S^2D^2 - 2D^3 & \end{array}$$

Das Bildungsgesetz dieser Koeffizienten ist abgesehen von der ersten Reihe genau gleich wie beim Pascalschen Dreieck. Deshalb ist dieses Dreieck die Summe der von den Zahlen 1 und 2 in der ersten Zeile erzeugten Pascalschen Dreiecke.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 9 & 7 & 2 \\ \dots & & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ \dots & & & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \\ \dots & & & \end{bmatrix}$$

Mit der Identität  $\binom{n}{k} + 2\binom{n}{k-1} = \frac{n+k+1}{n+1}\binom{n+1}{k}$  lässt sich die Summe als

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 9 & 7 & 2 \\ \dots & & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} \cdot 1 & \frac{2}{1} \cdot 1 \\ \frac{2}{2} \cdot 1 & \frac{3}{2} \cdot 2 & \frac{4}{2} \cdot 1 \\ \frac{3}{3} \cdot 1 & \frac{4}{3} \cdot 3 & \frac{5}{3} \cdot 3 & \frac{6}{3} \cdot 1 \\ \frac{4}{4} \cdot 1 & \frac{5}{4} \cdot 4 & \frac{6}{4} \cdot 6 & \frac{7}{4} \cdot 4 & \frac{8}{4} \cdot 1 \\ \frac{5}{5} \cdot 1 & \frac{6}{5} \cdot 5 & \frac{7}{5} \cdot 10 & \frac{8}{5} \cdot 10 & \frac{9}{5} \cdot 5 & \frac{10}{5} \cdot 1 \\ \dots & & & & & \end{bmatrix}$$

schreiben und wir erhalten schliesslich

$$p_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} S^{n-2k} D^k.$$

**Aufgabe 1388 (Die einfache dritte Aufgabe).** Die Beziehung

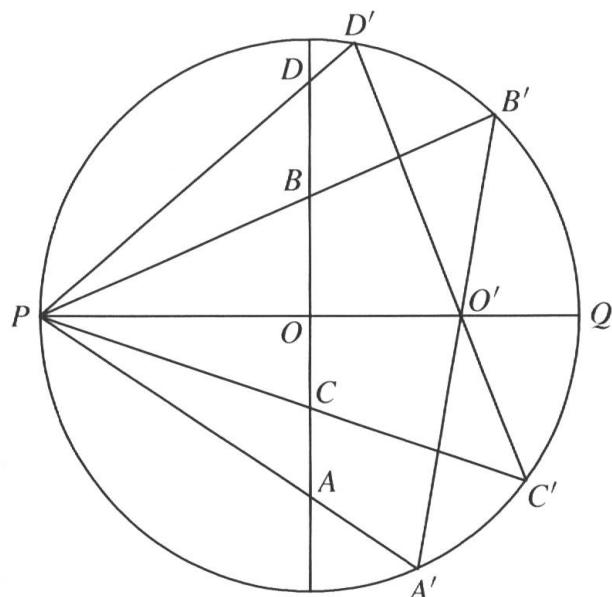
$$A'O' \cdot B'O' = D'O' \cdot C'O'$$

(siehe Figur) heisst Eukl. III.35 und ist seit über 2300 Jahren bekannt. Weniger populär ist dagegen das ähnliche Resultat

$$AO \cdot BO = DO \cdot CO.$$

Gefragt ist ein möglichst eleganter Beweis, eventuell mit Literaturzitaten.

Gerhard Wanner, Genève, CH



**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Folgende 9 Leser haben Lösungen eingesandt: Yagub Aliyev (Khyrdalan, AZ), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Raphael Muhr (Oberammergau, D), Fritz Siegerist (Küschnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die meisten Löser arbeiten mit einfachen trigonometrischen Hilfsmitteln oder mit ähnlichen Dreiecken. Wir folgen den Ausführungen von *Raphael Muhr*, der mit minimalen Mitteln auskommt.

Wir tragen noch die Endpunkte  $P$  und  $Q$  des Durchmessers durch  $O$  und  $O'$  ein. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke  $PAO$  und  $PQA'$  resp.  $PBO$  und  $PQB'$  sehen wir, dass

$$AO = PO \cdot \frac{A'Q}{A'P} \text{ und } BO = PO \cdot \frac{B'Q}{B'P} \quad \Rightarrow \quad AO \cdot BO = PO^2 \cdot \frac{A'Q \cdot B'Q}{A'P \cdot B'P}.$$

Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke  $B'QO'$  und  $PA'O'$  resp.  $A'QO'$  und  $PB'O'$  ist

$$\frac{B'Q}{A'P} = \frac{QO'}{A'O'} \text{ und } \frac{A'Q}{B'P} = \frac{A'O'}{PO'} \quad \Rightarrow \quad \frac{A'Q \cdot B'Q}{A'P \cdot B'P} = \frac{QO'}{PO'}.$$

Somit ist

$$AO \cdot BO = PO^2 \cdot \frac{QO'}{PO'}$$

konstant für jeden festen Punkt  $O'$ .