Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 75 (2020)

Heft: 2

Artikel: Drittes Hilbertsches Problem mit Dehn-Invariante : eine Elementarisierung mit Kugeldreiecken

Autor: Leppmeier, Max

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-880883

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 18.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 75 (2020) 58 – 68
0013-6018/20/020058-11
DOI 10.4171/EM/405

© Swiss Mathematical Society, 2020

Elemente der Mathematik

Drittes Hilbertsches Problem und Dehn-Invariante – Eine Elementarisierung mit Kugeldreiecken

Max Leppmeier

Max Leppmeier studierte Mathematik und Physik für das Lehramt an Gymnasien an der Ludwig-Maximilians-Universität München und war dann in unterschiedlichen Funktionen als Pädagoge tätig. Er verfasste das Buch „Kugelpackungen von Kepler bis heute" und promovierte bei Prof Dr. Ulm und Prof. Dr. Dr. h.c. Beutelspacher an der Universität Bayreuth über „Mathematische Begabungsförderung am Gymnasium".

1 Einleitung

Das dritte Hilbertsche Problem lautet im Original:

> „Gauss spricht in zwei Briefen an Gerling sein Bedauern darüber aus, daß gewisse Sätze der Stereometrie von der Exhaustionsmethode, d.h. in der modernen Ausdrucksweise von dem Stetigkeitsaxiom (oder von dem Archimedischen Axiome) abhängig sind. G a u s s nennt besonders den Satz von E u k l i d , daß

Der Satz von Wallace, Bolyai und Gerwien besagt, dass flächengleiche Polygone in der Ebene zerlegungsgleich sind. Ob sich zwei dreidimensionale Polyeder in paarweise kongruente Teilpolyeder zerlegen lassen, stellte sich dagegen als eine bedeutend schwierigere Frage heraus, die lange offen blieb: In einem Briefwechsel mit Gauß spitzte Gerling die Fragestellung zu. Gauß legte die Thematik 1844 zur Seite, Gerling ein gutes Jahr später – ungelöst. Hilbert hob sie 1900 wieder aufs Tableau, Dehn griff das Problem auf und löste es, noch bevor Hilbert die Liste seiner berühmten Probleme veröffentlicht hatte. Aigner und Ziegler nahmen 1998 das dritte Hilbertsche Problem in ihr Buch der „perfekten Beweise" auf. Ein solch „perfekter Beweis", nämlich dass die Zerlegungsgleichheit von Polyedern gleichen Volumens an eine weitere Bedingung geknüpft ist, geht anfangs auf Dehn und Boltjanski zurück, später gründet er auf Ideen Benkos und Bricards. Der Autor der vorliegenden Arbeit gibt nun einen elementaren Beweis mit sphärischen Vielecken, der die Ansätze der Dehn-Invariante und der Bricard-Bedingung zusammenführt und vereinheitlicht.

> dreiseitige Pyramiden von gleicher Höhe sich wie ihre Grundflächen verhalten. Nun ist die analoge Aufgabe in der Ebene vollkommen erledigt worden; auch ist es Gerling gelungen, die Volumengleichheit symmetrischer Polyeder durch Zerlegung in congruente Teile zu beweisen. Dennoch erscheint mir der Beweis des eben genannten Satzes von Euklid auf diese Weise im allgemeinen wohl nicht als möglich und es würde sich also um den strengen Unmöglichkeitsbeweis handeln. Ein solcher wäre erbracht, sobald es gelingt, zwei Tetraeder mit gleicher Grundfläche und von gleicher Höhe anzugeben, die sich auf keine Weise in congruente Tetraeder zerlegen lassen und die sich auch durch Hinzufügung congruenter Tetraeder nicht zu solchen Polyedern ergänzen lassen, für die ihrerseits eine Zerlegung in congruente Tetraeder möglich ist." [1, S. 266f.]

Dahinter steht eine interessante Ideengeschichte [1–12]. Dehn konnte als erster zeigen, dass ein Würfel und ein volumengleiches reguläres Tetraeder nicht zerlegungsgleich sind [3], und gab wenig später zwei Tetraeder mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe an, die nicht zerlegungsgleich sind [4].

Mit anderen Worten: Es gibt keine endliche Zerlegung eines Würfels in ein Sortiment aus Polyedern, aus dem man ein reguläres Tetraeder aufbauen kann und umgekehrt. Das gleiche gilt für Tetraeder *TI* und Tetraeder *TII* (Abbildung 5).

2 Elementarisierung der Dehn-Invariante

Dehn führte für Polyeder folgende Größe ein [8, S. 39ff.], die für zelegungsgleiche Polyeder den gleichen Wert annimmt:

Definition (Dehn-Invariante). Gegeben sei ein Polyeder P. Für jede Kante k bezeichne $l(k)$ die Länge der Kante k und $\alpha(k)$ den Kantenwinkel[1] zu k, d.h. den Winkel zwischen den beiden an k angrenzenden Flächen. Die Menge aller Kantenwinkel von P einschließlich π sei M_P. Für eine beliebige, reelle Obermenge M zu M_P sei $V(M)$ die Menge aller Linearkombinationen von Zahlen aus M mit rationalen Koeffizienten und die Funktion f eine beliebige $\mathbb{Q}$-lineare Funktion $f : V(M) \to \mathbb{Q}$, die die Bedingung $f(\pi) = 0$ erfüllt. Dann heißt der Term $m_f(k) := l(k) \cdot f\big(\alpha(k)\big)$ *Masse der Kante* k *(bzgl.* f*)* und

$$D_f(P) := \sum_{k \in P} m_f(k)$$

Dehn-Invariante von P *(bzgl.* f*).*

Wir führen nun eine gedankliche Klonierung eines Kantenwinkels in zwei Kantenwinkel durch, die wir jeweils an die Ecken schieben (Abbildung 1).

[1] In der Literatur findet man dafür auch den Begriff „Diederwinkel" [10, 11].

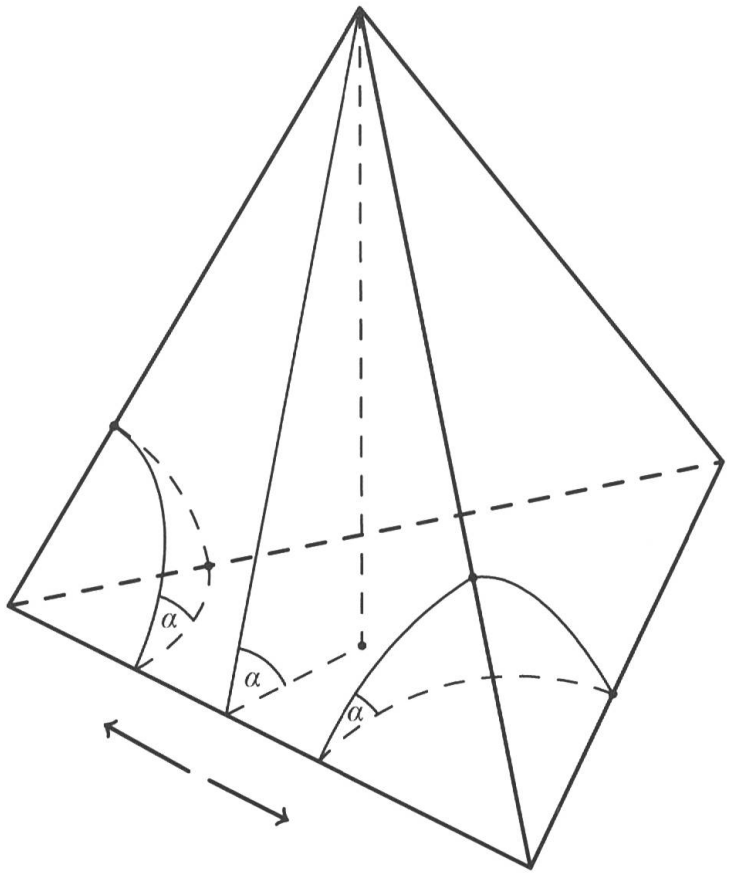


Abbildung 1 Übergang Kantenwinkel – Kugeldreieckswinkel

Die Kantenwinkelbögen bilden somit an den Ecken sphärische Vielecke, die den Weg zum einfacheren und neuen Begriff der L-Invariante bereiten.

Definition. Gegeben sei ein Polyeder P mit Kantenwinkeln $\alpha\,(k)$. Für jede Ecke e bezeichne K_e die Menge der Kanten, die e enthalten. Dann heißt

$$\varepsilon_e := \sum_{k \in K_e} \alpha(k) - (|K_e| - 2) \cdot \pi$$

sphärischer Exzess an der Ecke e und

$$L(P) := \sum_{e \in P} \varepsilon_e$$

L-Invariante von P.

Aus der sphärischen Trigonometrie wissen wir, dass bei einer Einheitssphäre der sphärische Exzess an der Ecke e genau der Fläche des sphärischen Vielecks entspricht, das durch die Kantenwinkelbögen an der Ecke e gebildet wird. Denn es gilt:

Satz (Flächeninhalt eines sphärischen Vielecks). *Auf der Einheitssphäre sei ein sphärisches Vieleck gegeben. Es bezeichne K die Menge der Ecken des sphärischen Vielecks; für*

eine Ecke $k \in K$ sei $\alpha(k)$ der dazu gehörige sphärische Innenwinkel. Dann gilt für den Flächeninhalt A des sphärischen Vielecks:

$$A = \varepsilon := \sum_{k \in K} \alpha(k) - (|K| - 2) \cdot \pi .$$

Beweis. Einen schönen, direkten Zugang findet man in [13, S. 3ff.]. Ein weiterer Beweis ist in [14, S. 22ff.] ausgeführt. Allein wegen der auf Kupfertafeln angefertigten Abbildungen lesenswert ist der historische Beweis in [15]. □

In geometrischer Hinsicht bezeichnet die L-Invariante eines Polyeders daher die Flächensumme der sphärischen Vielecke an den Ecken. Wir betrachten zwei Beispiele.

L-Invariante eines Würfels W. Wir erhalten an jeder Ecke e den sphärischen Exzess

$$\varepsilon_e = 3 \cdot \frac{\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}$$

und damit für die L-Invariante

$$L(W) = \sum_{e \in W} \varepsilon_e = 8 \cdot \frac{\pi}{2} = 4\pi .$$

Die sphärischen Exzesse an den acht Ecken ergeben also genau eine Kugel(oberfläche).

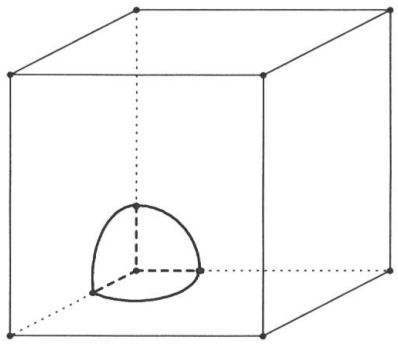


Abbildung 2 L-Invariante eines Würfels

L-Invariante eines regulären Tetraeders TIII (Abbildung 1). Wir erhalten als sphärischen Exzess an einer beliebigen Ecke e

$$\varepsilon_e = 3 \cdot \alpha - \pi .$$

Eine elementargeometrische Überlegung ergibt $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ und damit

$$\varepsilon_e = 3 \cdot \arccos\left(\frac{1}{3}\right) - \pi$$

und für die L-Invariante

$$L(TIII) = \sum_{e \in TIII} \varepsilon_e = 4 \cdot \left(3 \cdot \arccos\left(\frac{1}{3}\right) - \pi\right) = 12 \arccos\left(\frac{1}{3}\right) - 4\pi.$$

Hier ist für die Frage der Zerlegungsgleichheit von entscheidender Bedeutung, dass $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ ein irrationales Vielfaches von π ist [8, S. 33ff.], [9, S. 669], [10, S. 50].

3 Polyederzerlegungen und Eigenschaften der L-Invariante

Wir betrachten eine beliebige Zerlegung eines Polyeders in Teilpolyeder. Hier gibt es Zerlegungen, die keine neuen Teilpolyederecken generieren, aber auch Zerlegungen, die neue Ecken im Inneren (oder auf einer Facette oder auf einer Kante) des Ausgangspolyeders erzeugen.

Definition. Gegeben sei ein Polyeder P und eine Zerlegung in endlich viele Teilpolyeder $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Eine Zerlegung heißt *einfach*, wenn jede Ecke eines Teilpolyeders auch Ecke des Polyeders ist: $e \in P_i \implies e \in P$

Eine Zerlegung heißt *ziemlich einfach*, wenn keine Ecke eines Teilpolyeders P_i im Inneren einer Kante des Polyeders P liegt und wenn jede Ecke eines Teilpolyeders P_i auch Ecke eines jeden angrenzenden Teilpolyeders ist.

Abhängig von der Art der Polyeder-Zerlegung haben wir unterschiedlich starke Invarianzen der L-Invariante. Wir beginnen mit der stärksten Invarianz.

Lemma 1 (Additivität und starke Invarianz der L-Invariante). *Gegeben sei ein Polyeder P und eine einfache Zerlegung in endlich viele Teilpolyeder $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Dann gilt:* $L(P) = L(P_1) + L(P_2) + \cdots + L(P_n)$

Beweis. (Der Beweis ist anschaulich klar.) Wir betrachten eine Ecke e des Polyeders P und das von den dazugehörigen Kantenwinkeln bestimmte Kugelvieleck mit der Oberfläche ε_e. Wir betrachten die Teilpolyeder P_{e_i} mit der gemeinsamen Ecke e.

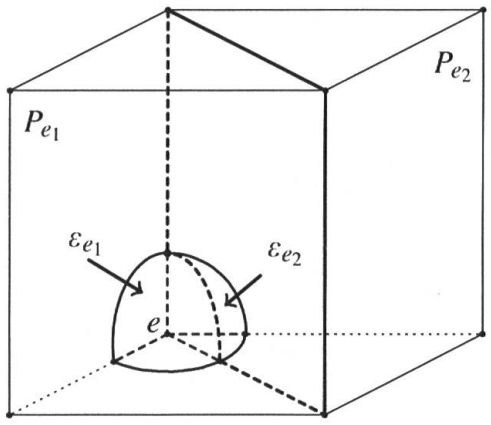


Abbildung 3 Additivität und Invarianz

Diese erzeugen an der Ecke e auf natürliche Weise eine Zerlegung des Kugelvielecks mit Oberfläche ε_e in die Teilkugelvielecke mit Oberfläche ε_{e_i}, also $\varepsilon_e = \sum_i \varepsilon_{e_i}$.
Mit der Definition der L-Invariante erhalten wir:

$$L(P) = \sum_{e \in P} \varepsilon_e = \sum_{e \in P} \sum_i \varepsilon_{e_i}$$

$$L(P_1) + L(P_2) + \cdots + L(P_n) = \sum_{e_1 \in P_1} \varepsilon_{e_1} + \sum_{e_2 \in P_2} \varepsilon_{e_2} + \ldots + \sum_{e_n \in P_n} \varepsilon_{e_n} = \sum_i \sum_{e_i \in P_i} \varepsilon_{e_i}.$$

Wir gruppieren die Summe mit Blick auf die betrachtete Ecke e um und erhalten

$$L(P_1) + L(P_2) + \cdots + L(P_n) = \sum_{e \in P} \sum_i \varepsilon_{e_i} = L(P). \qquad \square$$

Die Invarianz wird etwas schwächer, wenn eine zusätzliche Ecke im Inneren oder auf einer Facette entsteht. Dann gilt:

Lemma 2 (Ziemlich starke Invarianz der L-Invariante). *Gegeben sei ein Polyeder P und eine ziemlich einfache Zerlegung in endlich viele Teilpolyeder $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Es sei n_π die Summe aus der doppelten Anzahl der Ecken auf den Facetten von P und der vierfachen Anzahl der Ecken im Inneren von P. Dann gilt: $L(P) + n_\pi \cdot \pi = L(P_1) + L(P_2) + \cdots + L(P_n)$.*

Beweis. Da jede Ecke der ziemlich einfachen Zerlegung auch Ecke eines jeden angrenzenden Teilpolyeders ist, können wir den Beweis wie in Lemma 1 führen. Dabei ist zu beachten, dass eine zusätzliche Ecke im Inneren von P zu einer Vollkugel mit Oberfläche 4π und eine Ecke auf einer Facette von P zu einer Halbkugel mit Oberfläche 2π führt (Abbildung 4, links bzw. Mitte). $\square$

Die Invarianz wird noch einmal schwächer, wenn zusätzliche Ecken auf den Kanten zugelassen werden.

Lemma 3 (Schwache Invarianz der L-Invariante). *Gegeben sei ein Polyeder P und eine Zerlegung in endlich viele Teilpolyeder $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Jede Ecke eines Teilpolyeders P_i sei auch Ecke eines jeden angrenzenden Teilpolyeders. Für jede Kante $k \in P$ sei $\alpha(k)$ der Kantenwinkel. Dann gilt:*

$$L(P) \equiv \sum_{k \in P} 2 \cdot \alpha(k) \pmod{\pi}.$$

Und es gibt gerade Zahlen $m_k \in 2\mathbb{N}$, so dass gilt:

$$L(P_1) + L(P_2) + \cdots + L(P_n) \equiv \sum_{k \in P} m_k \cdot \alpha(k) \pmod{\pi}.$$

Beweis. Die Zerlegung des Polyeders P in die Teilpolyeder $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ergibt zu den Ecken e von P noch weitere Ecken; wir nennen sie *Zerlegungsecken*. Wie im Beweis für Lemma 2 ist jede Zerlegungsecke auch Ecke aller angrenzenden Teilpolyeder.

Die erste Aussage ergibt sich folgendermaßen aus der Definition: Es ist

$$L(P) = \sum_{e \in P} \varepsilon_e = \sum_{e \in P} \sum_{k \in K_e} \alpha(k) - (|K_e| - 2) \cdot \pi$$

und damit

$$L(P) \equiv \sum_{e \in P} \sum_{k \in K_e} \alpha(k) \pmod{\pi}.$$

Da jede Kante zu zwei Ecken gehört, haben wir

$$L(P) \equiv \sum_{k \in P} 2 \cdot \alpha(k) \pmod{\pi}.$$

Die zweite Aussage können wir folgendermaßen zeigen: Hinsichtlich der Lage der Zerlegungsecken im Inneren von P unterscheiden wir drei Fälle. Sie sind in Abbildung 4 skizziert.

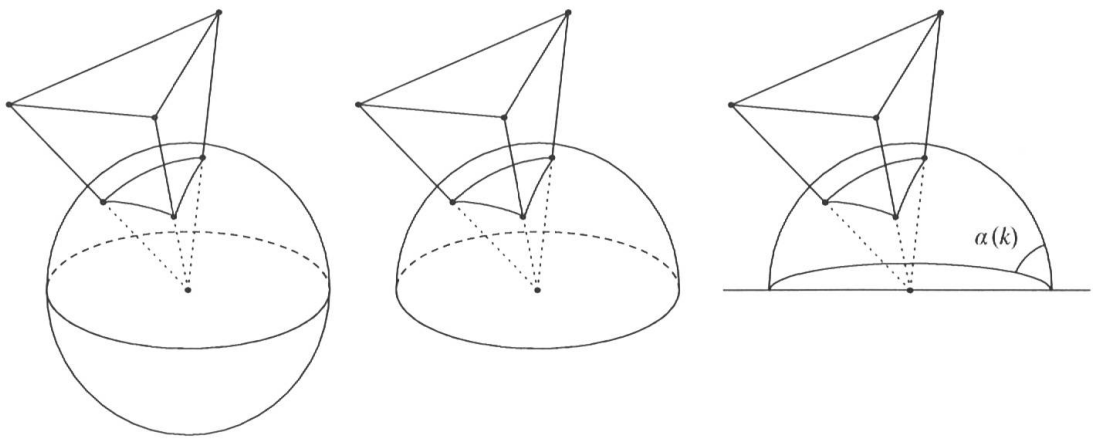


Abbildung 4 Zerlegungsecke im Inneren, auf einer Facette und auf einer Kante

1. Fall: Die Zerlegungsecke liegt im Inneren von P (Abbildung 4, links). Wir nennen sie e'.

Dann ergeben die Kugelvielecke eine Kugel mit Mittelpunkt e'. Ihre Oberfläche ist 4π und ihr Beitrag zur L-Invariante ist $mod\ \pi$ also nicht zu berücksichtigen.

2. Fall: Die Zerlegungsecke liegt auf einer Begrenzungsfläche (Facette) von P, jedoch nicht auf einer Kante (Abbildung 4, Mitte). Wir nennen sie e''.

Dann ergeben die Kugelvielecke eine Halbkugel mit Mittelpunkt e''. Ihre Oberfläche ist 2π und ihr Beitrag kann wieder $mod\ \pi$ vernachlässigt werden.

3. Fall: Die Zerlegungsecke liegt im Inneren einer Kante k von P (Abbildung 4, rechts). Wir nennen sie e'''.

Hier ergeben die Kugelvielecke zur Ecke e''' gerade ein Kugelzweieck. Seine Oberfläche ist $\frac{\alpha(k)}{2\pi} \cdot 4\pi = 2\alpha(k)$. Da auf jeder Kante höchstens endlich viele Ecken vom Typ e''' liegen können, ist ihr Beitrag zur L-Invariante $m_k \cdot \alpha(k)$ ($m_k \in 2\mathbb{N}$). Daraus folgt die Behauptung. □

Lemma 3 ist entscheidend für den folgenden Gedankengang.

4 Zerlegungsgleichheit

Wir vergleichen die Zerlegungen von zwei Polyedern.

Definition (Zerlegungsgleichheit). Zwei Polyeder P und Q heißen *zerlegungsgleich*, wenn es je eine Zerlegung für P und für Q gibt mit $P = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n$ und $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_n$, so dass P_i kongruent ist zu Q_i für alle $1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}$.

Ohne einfache und ziemlich einfache Zerlegungen im Detail zu betrachten, wenden wir uns unmittelbar der allgemeinen Situation zu.

Die Untersuchung erfordert zunächst eine Vorüberlegung, die auch Bestandteil einer ziemlich einfachen Zerlegung ist: Wir betrachten ein Teilpolyeder P_i und eine Ecke e eines anderen Teilpolyeders, die auf dem Rand von P_i liegt, jedoch nicht Ecke von P_i ist. Dann liegt e im Inneren einer Fläche von P_i oder im Inneren einer Kante von P_i. In beiden Fällen kann man eine Zerlegung von P_i in endlich viele Teilpolyeder angeben, so dass e nur noch Ecke eines jeden Teilpolyeders von P_i ist. Da die Zerlegungsungleichheit einer feineren Zerlegung auch die Zerlegungsungleichheit der Ausgangszerlegung impliziert, können wir im Folgenden ohne Einschränkung annehmen, dass jede Ecke der Zerlegung auch Ecke eines jeden angrenzenden Teilpolyeders ist.

Proposition 1. *Gegeben sind zwei volumengleiche Polyeder P und Q. Wenn alle Kantenwinkel von P gleich und irrationale Vielfache von π sind, und wenn alle Kantenwinkel von Q gleich und rationale Vielfache von π sind, dann sind P und Q nicht zerlegungsgleich.*

Beweis. Wir nehmen an, die beiden Polyeder P und Q sind zerlegungsgleich mit den Zerlegungen $P = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n$ und $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_n$.

Die Kantenwinkel von P seien $p\pi$ ($p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$), diejenigen von Q seien $q\pi$ ($q \in \mathbb{Q}$).

Dann haben wir mit Lemma 3

$$L(P_1) + L(P_2) + \cdots + L(P_n) \equiv \sum_{k \in P} m_k \cdot p\pi \pmod{\pi}, \quad m_k \in 2\mathbb{N}$$

$$L(Q_1) + L(Q_2) + \cdots + L(Q_n) \equiv \sum_{k \in Q} n_k \cdot q\pi \pmod{\pi}, \quad n_k \in 2\mathbb{N}.$$

Daraus folgt

$$\sum_{k \in P} m_k \cdot p\pi = \sum_{k \in Q} n_k \cdot q\pi + n_\pi \pi, \quad (n_\pi \in \mathbb{Z})$$

und

$$\sum_{k \in P} m_k \cdot p = \sum_{k \in Q} n_k \cdot q + n_\pi .$$

Auf der linken Seite der Gleichung steht eine irrationale Zahl, auf der rechten Seite eine rationale Zahl. Dies ist ein Widerspruch und die Behauptung folgt. □

Proposition 1 zeigt, dass Würfel und reguläres Tetraeder nicht zerlegungsgleich sind.

Proposition 2. *Gegeben sind zwei volumengleiche Polyeder P und Q. Wenn das Kantenwinkelsortiment von P neben rationalen Vielfachen von π mindestens ein irrationales Vielfaches von π enthält, und wenn alle Kantenwinkel von Q rationale Vielfache von π sind, dann sind P und Q nicht zerlegungsgleich.*

Beweis. Wir nehmen an, die beiden Polyeder P und Q sind zerlegungsgleich mit den Zerlegungen $P = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n$ und $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_n$.
Der zu π irrationale Kantenwinkel von P sei $\alpha_0 = p\pi\,(p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, die zu π rationalen Kantenwinkel von P seien Vielfache von $q_p\pi\,(q_p \in \mathbb{Q})$.
Die Kantenwinkel von Q seien Vielfache von $q\pi\,(q \in \mathbb{Q})$.
Aus Lemma 3 haben wir

$$L(P_1) + L(P_2) + \cdots + L(P_n) \equiv \sum_{k \in P} m_k \cdot \alpha(k) \pmod{\pi}, \quad m_k \in 2\mathbb{N}$$

$$L(Q_1) + L(Q_2) + \cdots + L(Q_n) \equiv \sum_{k \in Q} n_k \cdot \alpha(k) \pmod{\pi}, \quad n_k \in 2\mathbb{N}$$

und damit für ein $n_\pi \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{k \in P} m_k \cdot \alpha(k) = \sum_{k \in Q} n_k \cdot \alpha(k) + n_\pi \pi .$$

Unter Berücksichtigung der gegebenen Winkelsortimente erhalten wir

$$m_0 \cdot \alpha_0 + \sum_{k \in P,\, \frac{\alpha(k)}{\pi} \in \mathbb{Q}} m_k \cdot \alpha(k) = \sum_{k \in Q} n_k \cdot \alpha(k) + n_\pi \pi, \quad (m_0 \in 2\mathbb{N})$$

$$m_0 \cdot \alpha_0 = \sum_{k \in Q} n_k \cdot \alpha(k) - \sum_{k \in P,\, \frac{\alpha(k)}{\pi} \in \mathbb{Q}} m_k \cdot \alpha(k) + n_\pi \pi$$

und mit $n, m \in 2\mathbb{N}$

$$m_0 \cdot p\pi = n \cdot q\pi - m \cdot q_p\pi + n_\pi \pi$$
$$m_0 \cdot p = n \cdot q - m \cdot q_p + n_\pi .$$

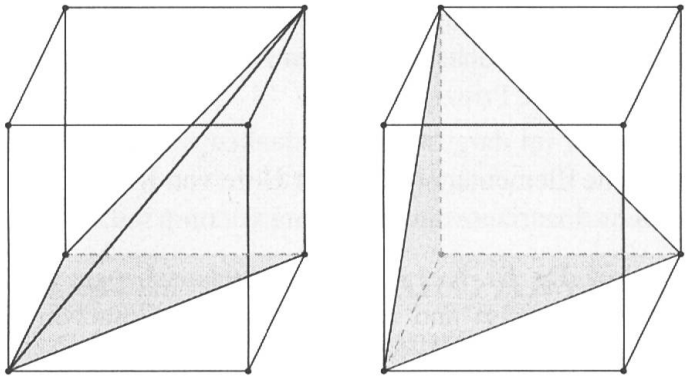
Auf der linken Seite der Gleichung steht eine irrationale Zahl, auf der rechten Seite eine rationale Zahl. Dies ist ein Widerspruch und die Behauptung folgt. □

Mit Proposition 2 können wir zwei Tetraeder angeben, die gleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben, aber nicht zerlegungsgleich sind (Abbildung 5):

Das Tetraeder *TI* heißt auch Roger's Simplex oder pieh-nao und ist der sechste Teil eines Würfels; die Kantenwinkel sind $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ [8, 16].

Das Tetraeder *TII* hat als Kantenwinkel $\frac{\pi}{2}$ und $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ [8, 16]. Ebenso wie $\arccos \frac{1}{3}$ ist auch $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ ein irrationales Vielfaches von π [8, S. 33ff.].

Da mit *TI* und *TII* die Voraussetzungen der Proposition 2 erfüllt sind, erkennen wir hier die elementare Lösung des dritten Hilbertschen Problems.



5 Vereinheitlichung des Satzes von Dehn–Hadwiger und der Bricard-Bedingung

Wir setzen den Gedankengang über die Proposition 2 hinaus fort.

Satz (Dehn–Hadwiger, „Bricard"-Bedingung[2]). *Es seien P und Q zwei Polyeder mit Kantenwinkeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ bzw. $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$. Wenn P und Q zerlegungsgleich sind, dann gibt es natürliche Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_p$ und $n_1, n_2, \ldots, n_q$, so dass*

$$\sum_i m_i \cdot \alpha_i \;-\; \sum_j n_j \cdot \beta_j \;=\; n_\pi \pi$$

für ein ganzzahliges n_π gültig ist.

Beweis. Da P und Q zerlegungsgleich sind, gibt es Zerlegungen $P = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n$ und $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_n$. Nach Lemma 3 gibt es gerade Zahlen $m_i, n_j \in 2\mathbb{N}$ mit

$$L(P_1) + L(P_2) + \cdots + L(P_n) \equiv \sum_i m_i \cdot \alpha_i \pmod{\pi}$$

$$L(Q_1) + L(Q_2) + \cdots + L(Q_n) \equiv \sum_j n_j \cdot \beta_j \pmod{\pi}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Diese Formulierung des Satzes von Dehn–Hadwiger in der elementarisierten Version ist hochinteressant: Sie erscheint als sog. Bricard-Bedingung, die in der historischen Genese des dritten Hilbertschen Problems auch eine hohe Bedeutung erlangte. Bereits 1896 wurde sie von Bricard angegeben und für einen Beweisversuch der Nichtzerlegbarkeit von regulärem Tetraeder und Würfel verwendet.

Wir bekommen hier die Bricard-Bedingung nicht in einem eigenständigen Elementarisierungsversuch wie bei Benko, Aigner/Ziegler oder Wittmann [9–11], sondern als kugelgeometrische Interpretation des Ansatzes von Dehn und Hadwiger [3–7]. Insofern führt die

[2] Dieser Satz heißt in [11, S. 75] nicht mehr Dehn–Hadwiger, sondern „Bricard"-Bedingung. Die Beweisführung erfordert dort ein Perlenlemma und ein Kegel-Lemma, sie wurde bereits in [10] elementarisiert.

kugelgeometrische Elementarisierung der Dehn-Invariante mit Hilfe der einfacher konstruierten L-Invariante beide zunächst getrennten Ansätze zusammen und legt das ihnen zugrundeliegende allgemeinere Prinzip offen.

Zusammenfassend erhalten im dargestellten Gedankengang die Bricard-Bedingung eine geometrisch-anschauliche Elementarisierung mit Hilfe von Kugelzweiecken an den Polyederkanten und die Dehn-Invariante eine Elementarisierung mit Kugeldreiecken.

Danksagung. Herrn Prof. Dr. Dr. h.c. Albrecht Beutelspacher und Herrn Prof. Dr. Ulm danke ich für wertvolle Hinweise und Anregungen. Den Gutachtern danke ich für die zeitnahe, ermutigende und konstruktive Manöverkritik.

Literatur

[1] D. Hilbert. Mathematische Probleme. *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse aus dem Jahre* 1900, Bd. 3, 253–297, 1900.

[2] C.F. Gauss und C.L. Gerling. Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Christian Ludwig Gerling. C. Schaefer, Hrsg., Berlin: Elsner, 1927.

[3] M. Dehn. Über raumgleiche Polyeder. *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse aus dem Jahre* 1900, Bd. 3, 345–354, 1900.

[4] M. Dehn. Über den Rauminhalt. *Mathematische Annalen*, Bd. 55, 465–478, 1902.

[5] J.-P. Sydler. Conditions nécéssaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions. *Comment. Math. Helv.*, Bd. 40, 43–80, 1965.

[6] B. Jessen. The Algebra of Polyhedra and the Dehn–Sydler Theorem. *Math. Scand.*, Bd. 22, 241–256, 1968.

[7] P.M. Gruber. Convex and Discrete Geometry, Berlin Heidelberg: Springer, 2007.

[8] M. Aigner und G.M. Ziegler. Proofs from the BOOK, Berlin: Springer, 2000.

[9] D. Benko. New Approach to Hilbert's Third Problem. *The American Mathematical Monthly*, Bd. 114, 665–676, 2007.

[10] E.C. Wittmann. Elementarisierung von Benkos Lösung des 3. Hilbertschen Problems. *Elem. Math.*, Bd. 67, 45–50, 2012.

[11] M. Aigner und G.M. Ziegler. Das BUCH der Beweise, 4. Auflage, Berlin: Springer, 2015.

[12] D. Ciesielska und K. Ciesielski. Equidecomposability of Polyhedra: A Solution of Hilbert's Third Problem in Krakow before ICM 1900. *The Mathematical Intelligencer*, Bd. 40(2), 55–63, 2018.

[13] H. Walser. Geometrie: Skript für die Vorlesung: 91–157, G, Geometrie, 86-3, Ausgabe 2002. *Online*, http://dx.doi.org/10.3929/ETHZ-A-004377954, abgerufen am 21. Juni 2019.

[14] H. Kern und J. Rung. Sphärische Trigonometrie, 3. Auflage, München: bsv, 1991.

[15] M. Lori. Sphärische Trigonometrie – mit möglichster Klarheit beschrieben. Augsburg: Eberhards Kletts selige Witwe und Franck, 1783.

[16] M. Leppmeier. Mathematische Begabungsförderung am Gymnasium – Konzepte für Unterricht und Schulentwicklung, Wiesbaden: Springer, 2019.

Max Leppmeier
Universität Bayreuth
Lehrstuhl für Mathematik
und ihre Didaktik
D-95440 Bayreuth
e-mail: max.leppmeier@uni-bayreuth.de