Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 74 (2019)
Heft: 2

Artikel: Les problèmes de Fermat et Lemoine
Autor: Sigrist, François
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-869234

Elem. Math. 74 (2019) 76 – 79
0013-6018/19/020076-4
DOI 10.4171/EM/383

Elemente der Mathematik

Short note Les problèmes de Fermat et Lemoine

François Sigrist

1 Le problème de Fermat

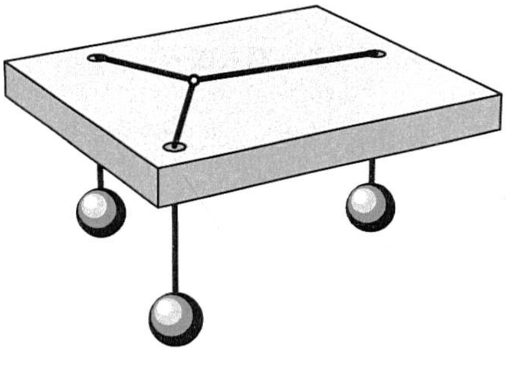
Il s'agit ici d'un problème posé par Fermat, peu connu, mais qui offre de spectaculaires développements dans la géométrie plane, une discipline souvent abandonnée par manque d'intérêt (Cf Dieudonné : A bas Euclide ! Mort aux triangles !).

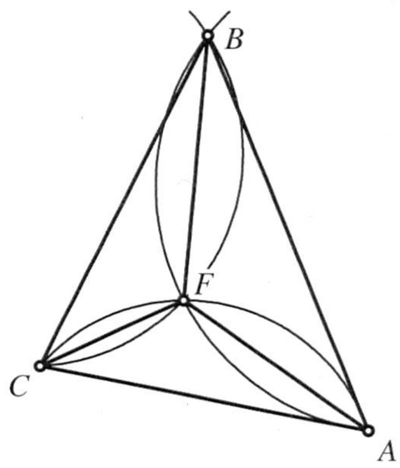
Trouver, dans un triangle ABC, le point F qui minimise $FA + FB + FC$, la somme des distances aux sommets. Pour un ingénieur, cela consiste à construire le réseau routier de longueur minimale entre trois villes. Pour que le problème soit réaliste, il faut supposer que les angles du triangle sont inférieurs à 120°.

La solution expérimentale (image de gauche) fait appel aux lois de la mécanique, et le calcul différentiel donne la solution théorique :

Le gradient de la distance à un point est un vecteur-unité (la dérivée directionnelle est 1). Pour que la somme des trois distances soit minimale, il est nécessaire de trouver trois vecteurs-unité de somme nulle. Il est alors presque immédiat de montrer qu'il n'y a qu'une seule configuration : trois vecteurs formant des angles de 120° entre eux.

Le point de Fermat est donc celui d'où l'on voit les trois côtés du triangle sous un angle de 120 degrés.

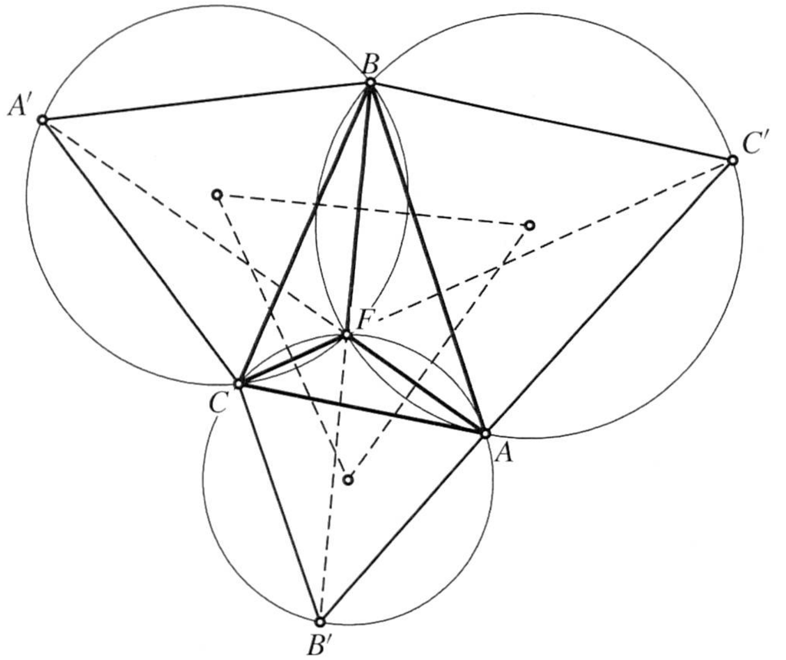




Pour construire le point F, il suffit donc de tracer les trois *arcs capables* de 120° : points d'où l'on voit les côtés sous un angle de 120 degrés. La construction est élémentaire et est basée sur le *théorème de l'angle inscrit*.

2 Le problème de Fermat revisité

Voici le même dessin que précédemment où l'on a simplement complété les ingrédients nécessaires à la construction des arcs capables, et ajouté les triangles équilatéraux sur chaque côté du triangle ABC.



Les deux observations suivantes :
- Les angles CFA' et CBA' sont égaux (60°) (théorème de l'angle inscrit)
- Les triangles $A'CA$ et BCB' sont égaux (rotation de 60°)

permettent de tirer une impressionnante cascade de conséquences :
- Tous les angles en F valent 60°.
- Les points $A'FA$, $B'FB$ et $C'FC$ sont alignés. Conséquence : Pour construire le point de Fermat, il suffit de dessiner les trois triangles équilatéraux.
- Les longueurs AA', BB', CC' sont égales.
- Le triangle formé par les centres des cercles est équilatéral (il a trois angles de 60° !)

Pour relier la longueur AA' au triangle de départ, il reste à montrer que la longueur FA' est égale à $FB + FC$, montrant ainsi que les trois longueurs égales AA',BB', et CC' sont égales à $FA+FB+FC$ (longueur du réseau routier !). Ceci s'obtient grâce au petit lemme de Ptolémée, que nous démontrerons au paragraphe suivant.

La propriété du triangle des centres est connue sous le nom de *Théorème de Napoléon*. Il n'est pas certain que Napoléon l'ait démontré, mais le contexte historique montre que Napoléon n'était pas étranger au résultat.

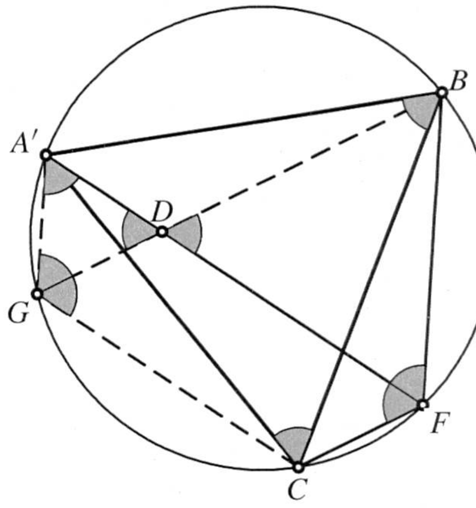
Tout d'abord, Napoléon connaissait d'assez près les mathématiciens prestigieux de l'époque (Poncelet, Fourier, Monge, Lagrange, ...). On a ensuite (malheureusement sans autre commentaire) une citation dans un journal italien de 1911, disant que Napoléon aurait parlé du problème à Lagrange.

D'après Henri Lebesgue, Lagrange lui aurait dit : «Mon Général, nous nous attendions à tout de vous, sauf à des leçons de géométrie».

On sait par ailleurs qu'à Ste-Hélène, Napoléon aurait donné des leçons de mathématiques aux enfants de Las Cases.

3 Le petit lemme de Ptolémée

Reprenons le quadrilatère $A'CFB$, auquel on ajoute la parallèle par C à $A'F$, obtenant ainsi encore les points G et D. Il est presqu'immédiat de constater que tous les angles marqués sur la figure valent 60 degrés (symétrie ou théorème de l'angle inscrit). Les triangles $A'GD$ et et FBD sont donc équilatéraux, et on en déduit que $FA' = FD + DA' = FB + DG = FB + FC$, comme prévu.



Remarque : Le lemme de Ptolémée lui-même est une version plus générale : Si un quadrilatère est inscrit dans un cercle, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés. Voir [2] pour une élégante démonstration.

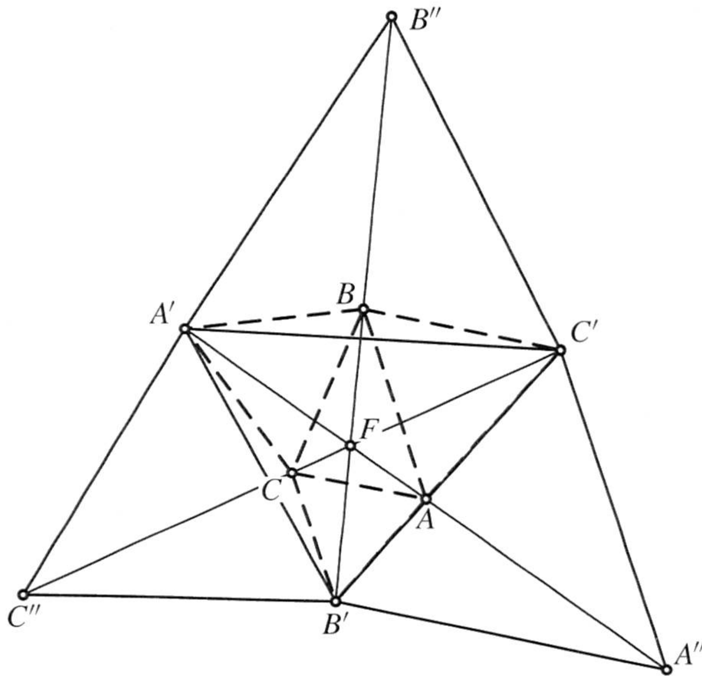
4 Le problème de Lemoine

Ce problème est en quelque sorte la réciproque de problème de Fermat : reconstituer le triangle ABC à partir du triangle $A'B'C'$. La solution est spectaculaire, il suffit d'itérer la construction du point de Fermat, en l'appliquant au triangle $A'B'C'$. L'image en haut de la page suivante donne la solution.

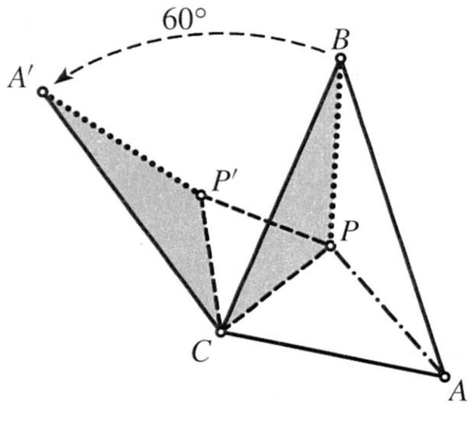
Comme tous les angles en F sont égaux à 60°, le point F est point de Fermat commun aux trois triangles ABC, $A'B'C'$ et $A''B''C''$. Pour retrouver le triangle ABC, il suffit donc de localiser les sommets A, B, et C sur les droites $A'A''$, resp. $B'B''$, resp. $C'C''$. Le résultat, spectaculaire, est à nouveau donné par le petit lemme de Ptolémée :

$$\begin{aligned}
FA'' &= FB' + FC' = (FA + FC) + (FA + FB)\\
FB'' &= FA' + FC' = (FB + FC) + (FA + FB)\\
FC'' &= FA' + FB' = (FB + FC) + (FA + FC)\\
FA'' + FB'' + FC'' &= B'B'' = 2(FA + FB + FC) = 2B'B
\end{aligned}$$

L'extraordinaire résultat est donc que les points A, B, et C sont les *milieux* de $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$.



5 Remarques finales



Pour les puristes de la géométrie, voici une solution du problème de Fermat ne nécessitant ni calcul différentiel, ni lemme de Ptolémée. Voir [1].

Le croquis parle de lui-même : pour tout point P du triangle ABC, la somme $PA + PB + PC$ peut se représenter par une ligne brisée de A à A'. C'est donc la ligne droite AA' qui contient le point de Fermat.

On doit à Kiepert une solution détaillée du problème de Lemoine [3, 4], suivie de plusieurs articles sur une généralisation du problème de Fermat.

Références

[1] Coxeter, H.S.M., Introduction to geometry, John Wiley & Sons (1961)

[2] Paunić, D., Wanner, G., On the proof of Ptolemy's lemma, El. Math. **72** (2017)

[3] Lemoine, É, "Question 864", Nouv. Ann. Math., **7** (1868)

[4] Kiepert, L , "Solution de Question 864", Nouv. Ann. Math. **8** (1869)