

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 74 (2019)
Heft: 1

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 12.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. August 2019 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH-8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1383:

- a) Man zeige, dass für $\alpha \in (0, 1]$ die in $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ holomorphe Funktion $f(z) = (1 - z)^\alpha$ Hölder-Lipschitz stetig ist zur Ordnung α , d.h.

$$\sigma_\alpha = \sup_{\substack{z, w \in \mathbb{D} \\ z \neq w}} \frac{|(1 - z)^\alpha - (1 - w)^\alpha|}{|z - w|^\alpha} < \infty.$$

Hierbei ist, wie üblich, $(1 - z)^\alpha = \exp(\alpha \log(1 - z))$, wobei der Hauptzweig des Logarithmus in der rechten Halbebene genommen wird.

- b) Man bestimme σ_α explizit.

Raymond Mortini, Metz, F und Rudolf Rupp, Nürnberg, D

Aufgabe 1384: Seien x, y, z positive reelle Zahlen, welche der Bedingung $x + y + z = 3$ genügen. Man beweise für $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\frac{(x + y)^{2n}}{xy(9 - xy)} + \frac{(y + z)^{2n}}{yz(9 - yz)} + \frac{(z + x)^{2n}}{zx(9 - zx)} \geq 3 \cdot 2^{2n-3}.$$

Oleh Faynshteyn, Leipzig, D

Aufgabe 1385 (Die einfache dritte Aufgabe): Die Felder eines $2 \times n$ -Gitterrechtecks R_n sind so mit Zahlen aus der Menge $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ zu belegen, dass zwei horizontal oder vertikal benachbarte Zahlen nicht beide ungerade sind. Man bestimme die Anzahl z_n solcher Belegungen.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 2018

Aufgabe 1371. Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Man berechne

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\frac{\pi}{4a}} \sin(a \ln(\tan(ax))) dx.$$

Daniel Fritze, Berlin, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Folgende 13 Leser haben Beiträge eingesandt: Ulrich Abel (Friedberg, D), Moritz Adelmeyer (Zürich, CH), Šefket Arslanagić (Sarajevo, BIH), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Paul Jolissaint (Porrentruy, CH), Albert Stadler (Herliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Hansruedi Widmer (Baden, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Fast alle Leser kommen mit einer Substitution und dem Vertauschen von Integral und Grenzwert zum Ziel. Wir folgen den Ausführungen von *Peter Bundschuh*.

Bei festem $a \in \mathbb{R}^*$ ist der Integralausdruck nach der Substitution $y = ax$ gleich

$$\frac{1}{a} \int_0^{\pi/4} \sin(a \ln(\tan(y))) dy = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(a \ln(\tan(y)))}{a \ln(\tan(y))} \cdot \ln(\tan(y)) dy.$$

Weiter strebt für jedes $y \in (0, \pi/4]$ der im Integranden rechts auftretende Quotient bei $a \rightarrow 0$ gegen 1. Nach einschlägigen Sätzen der Analysis, etwa dem Lebesgueschen Vertauschbarkeitssatz bei majorisierter Konvergenz, gilt deshalb

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\pi/(4a)} \sin(a \ln(\tan(ax))) dx = \int_0^{\pi/4} \ln(\tan(y)) dy.$$

Die Auswertung des hier rechts auftretenden Integrals ist im Prinzip bekannt, soll aber hier noch ausgeführt werden.

Mit der Substitution $t = \tan(y)$ ergibt sich für das uneigentliche Integral rechts

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\tan(y)) dy = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = \ln(t) \arctan(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t} dt,$$

wobei zuletzt mit partieller Integration der ausintegrierte Beitrag verschwindet. Weiter ergibt sich wegen

$$\frac{\arctan(t)}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2n+1}$$

für alle reellen $t \in [-1, 1]$

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\tan(y)) dy = - \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{2n+1} dt = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = -C,$$

wobei die alternierende Reihe rechts als Catalansche Konstante bekannt ist.

Aufgabe 1372. Wir betrachten reguläre Sechsecke im Raum, d.h. nicht planare Polygone mit 6 Seiten gleicher Länge und gleichen Winkeln zwischen Nachbarseiten.

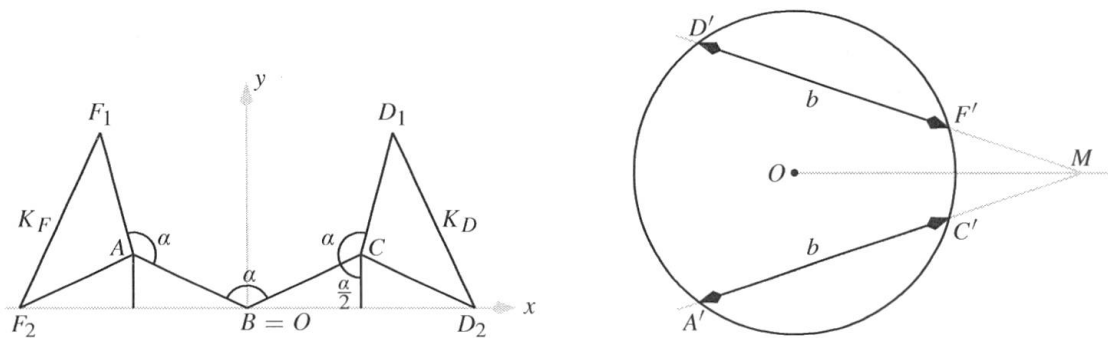
- Für welche Winkel existieren solche Sechsecke?
- Man zeige, dass die Sechsecke symmetrisch sind.
- Es seien $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$ aufeinander folgende Ecken regulärer Sechsecke. Für jede mögliche Symmetriegruppe soll durch Hinzufügen der fehlenden Ecken (Koordinatendarstellung) ein Beispiel angegeben werden.

Karl Wirth, Zürich, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 12 Zusendungen von folgenden Lesern eingetroffen: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Johannes M. Ebersold (St. Gallen, CH), Rolfdieter Frank (Koblenz, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Walter Nohl (Steffisburg, CH), Heinz Schumann (Weingarten, D), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herliberg, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Es zeigt sich als ziemlich aufwändig, alle möglichen Konfigurationen solcher Sechsecke anzugeben. Der Autor der Aufgabe gibt noch das Cyclohexan an, dessen sechs Kohlenstoffatome mit Bindungswinkel $\approx 109.5^\circ$ ein solches Sechseck bilden. Wir folgen den Ausführungen von *Henri Carnal*.

In einem regulären räumlichen Sechseck $ABCDEF$ sei $AB = a$, $\sphericalangle(ABC) = \alpha$ und somit $AC = BD = \dots = 2a \sin(\frac{\alpha}{2}) = b$. Für $\alpha \geq 120^\circ$ gibt es kein solches Dreieck. Seien etwa die Punkte $A, B = O, C$ in der xy -Ebene mit A, C symmetrisch zur y -Achse und seien D_1, D_2 die Punkte in der xy -Ebene mit $CD_i = a$, $\sphericalangle(BCD_i) = \alpha$, so müsste D auf dem Kreis K_D mit Durchmesser D_1D_2 liegen, der senkrecht zur xy -Ebene ist (siehe Figur 1 links). Ist $\alpha > 120^\circ$, d.h. $\alpha + \frac{\alpha}{2} > 180^\circ$, so läge D_1 und somit K_D rechts von C



Figur 1

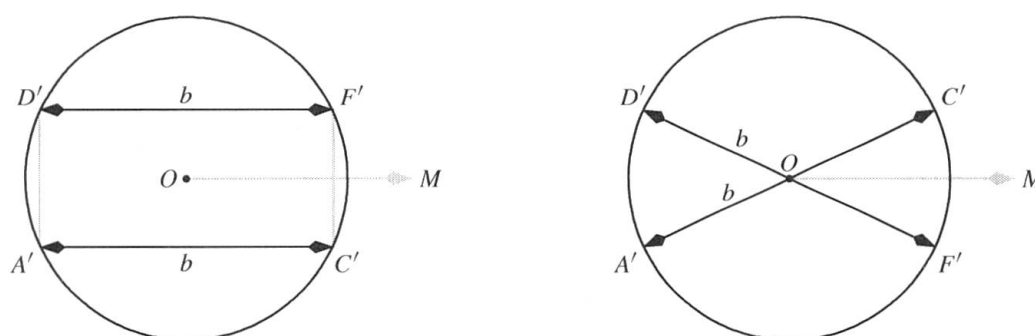
und analog K_F links von A . Es wäre $FD \geq x_D - x_F > AC = b$, was natürlich unmöglich ist. Für $\alpha = 120^\circ$ ist $D = D_1$, $F = F_1$ und das Sechseck liegt in der xy -Ebene.

Für $\alpha < 120^\circ$ gibt es folgendes Beispiel: $A(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{h}{2})$, $B(1, 0, \frac{h}{2})$, $C(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{h}{2})$, $D(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{h}{2})$, $E(-1, 0, -\frac{h}{2})$, $F(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{h}{2})$. Man hat $a = \sqrt{1 + h^2}$ und mit dem Cosinussatz ergibt sich $\cos(\alpha) = \frac{h^2 - 1/2}{h^2 + 1}$. Läuft h von $0 \rightarrow \infty$, so läuft $\cos(\alpha)$ von $-\frac{1}{2} \rightarrow 1$ und α von $120^\circ \rightarrow 0^\circ$. Dies zeigt Teil a). Für $h = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist $\alpha = 90^\circ$.

Zu b). Wir legen nun BE auf die z -Achse mit O als Streckenmittelpunkt. Wegen $AB = CB = a$, $AE = CE = b$ liegt AC auf dem Durchschnitt der Kugeln $\{P \in \mathbb{R}^3 : BP = a\}$ und $\{P \in \mathbb{R}^3 : EP = b\}$, also auf einem Kreis K_1 in einer Ebene $z = c$ und mit Mittelpunkt $(0, 0, c)$ und analog FD auf einem Kreis K_2 mit Mittelpunkt $(0, 0, -c)$. (Es gilt $K_1 = K_2$, falls $a = b \Leftrightarrow \alpha = 60^\circ$.) Man projiziert A, C, D, F auf die Ebene $z = 0$ und erhält das in Figur 1 rechts gezeigte Bild.

1. Fall: Ist $AD \neq CF$, so auch $A'D' \neq C'F'$ (die Projektionshöhe ist ja konstant), so dass die Bezeichnungen auf dem Bild gültig sind (man kann F' und D' nicht vertauschen). Eine Rotation um OM um 180° erbringt die Symmetrie $A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow E, C \leftrightarrow F$ und man erhält als Symmetriegruppe die zyklische Gruppe C_2 .

2. Fall: $AD = CF$ resp. $A'D' = C'F'$. Dann ist $A'C'F'D'$ ein Rechteck (siehe Figur 2 links), das auch entartet sein darf ($A' = F'$ und $C' = D'$).



Figur 2

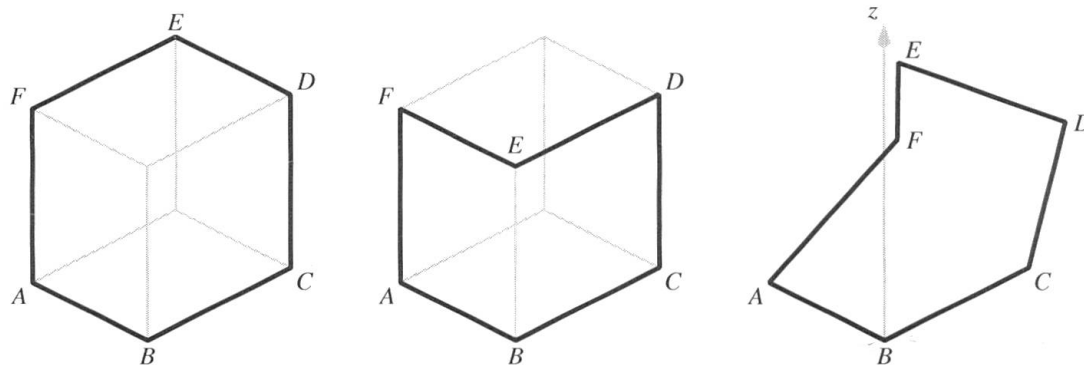
Die Rotation um OM bringt immer noch eine Symmetrie, dazu kommt eine Spiegelung an der Normalenebene zu OM durch O : $A \leftrightarrow C, D \leftrightarrow F$, sowie noch eine Punktspiegelung an O : $A \leftrightarrow F, B \leftrightarrow E, C \leftrightarrow D$. Als Symmetriegruppe erhält man die Kleinsche Vierergruppe $C_2 \times C_2$. Im entarteten Fall ist die Drehachse OM normal zur Ebene $ACDF$, dazu kommt eine Spiegelung an der Ebene durch OM und die z -Achse, sowie noch eine Spiegelung an der xy -Ebene. Die Symmetriegruppe ist dieselbe wie im nicht entarteten Fall.

Möglich ist auch ein Kreuzmuster (siehe Figur 2 rechts). Man vertauscht $A \leftrightarrow C, D \leftrightarrow F$ durch eine Rotation um die z -Achse, und $A \leftrightarrow F, B \leftrightarrow E, C \leftrightarrow D$ durch eine Rotation zur Achse, die senkrecht zu OM und zur z -Achse ist. Wiederum erhält man die gleiche Symmetriegruppe.

3. Fall: $AD = BE = CF$. Hier kann man die Elemente der Dreiecke ACE resp. BDF beliebig unter sich permutieren. Die Rotation $ACE \rightarrow EAC$ entsteht z.B. aus $A \leftrightarrow C$ gefolgt von $C \leftrightarrow E$. Die Vertauschung der Dreiecke ist immer möglich (siehe Fall 1). Die Permutationsgruppe ist die Diedergruppe D_6 und hat 12 Elemente.

Zu c). Sei $A(0, 1, 0), B(0, 0, 0), C(1, 0, 0)$, d.h. $a = 1, \alpha = 90^\circ, b = \sqrt{2}$. In der Figur 3 links sind $D(1, 0, 1), E(1, 1, 1), F(0, 1, 1)$ mit $AD = BE = CF = \sqrt{3}$; man hat also den 3. Fall.

In Figur 3 Mitte sind $D(1, 0, 1), E(0, 0, 1), F(0, 1, 1)$ mit $AD = CF = \sqrt{3}, BE = \sqrt{1}$ und man hat den 2. Fall (entartetes Rechteck).



Figur 3

Wir wählen noch $E(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2})$ mit $AE = CE = BE = \sqrt{2}$ und setzen

$$D(1, \cos(\varphi_+), \sin(\varphi_+)), \quad F(\cos(\varphi_-), 1, \sin(\varphi_-)).$$

Damit sind alle Bedingungen ausser $DE = FE = 1$ und $DF = \sqrt{2} \Leftrightarrow \vec{BD} \cdot \vec{BF} = 1$ erfüllt. Aus $DE^2 = FE^2 = 1$ berechnet man

$$\cos(\varphi_{\pm}) = \frac{2}{7} \mp \frac{\sqrt{18}}{7}, \quad \sin(\varphi_{\pm}) = \frac{\sqrt{24}}{7} \pm \frac{\sqrt{3}}{7}$$

und man erhält $\vec{BD} \cdot \vec{BF} = \cos(\varphi_+) + \cos(\varphi_-) + \sin(\varphi_+) \sin(\varphi_-) = 1$. Weiter berechnet man $AD^2 = 3 - 2 \cos(\varphi_+)$ und $CF^2 = 3 - 2 \cos(\varphi_-)$. Also sind AD , BE und CF paarweise verschieden und man hat den Fall 1 (Figur 3 rechts).

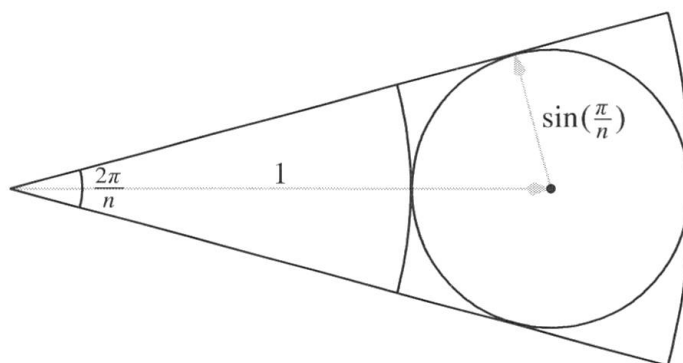
Aufgabe 1373 (Die einfache dritte Aufgabe). Einem Kreis K_0 wird eine geschlossene Kette von n kongruenten Kreisen k_0 eingeschrieben, die alle K_0 berühren ($n \geq 3$). K_1 sei dann der zu K_0 konzentrische Kreis, der alle Kreise k_0 berührt. Iteriert man dieses Vorgehen, erhält man unendlich viele Kreise K_i und unendlich viele Ketten mit je n Kreisen k_i ($i = 0, 1, 2, \dots$). Man berechne das Verhältnis v_n der Flächeninhaltssumme aller Ketten zum Inhalt von K_0 und $v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 13 Zuschriften von folgenden Lesern eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Johannes M. Ebersold (St. Gallen, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Walter Nohl (Steffisburg, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Hansruedi Widmer (Baden, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D), Roland Wyss (Flumenthal, CH) und Josef Züger (Bonaduz, CH).

Man kann sich die Arbeit ein bisschen erleichtern, wenn man bemerkt, dass man gar nicht die ganze Kreiskette auszurechnen braucht, wie wir es auch bei *Fritz Siegerist*, dessen Lösung wir folgen, schön sehen.

Wegen Ähnlichkeit kann man sich für v_n nicht nur auf einen Sektor mit Winkel $\frac{2\pi}{n}$, sondern sogar auf einen einzigen Ring-Sektor beschränken.



Figur 4

Mit den Ringradien $1 - \sin(\frac{\pi}{n})$ und $1 + \sin(\frac{\pi}{n})$ und dem Kreisradius $\sin(\frac{\pi}{n})$ erhält man schnell

$$v_n = \frac{\pi \sin^2(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n} ((1 + \sin(\frac{\pi}{n}))^2 - (1 - \sin(\frac{\pi}{n}))^2)} = \frac{n}{4} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Der Grenzwert beträgt

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Bemerkung: Ein Leser gibt an, dass die gleiche Aufgabe als Teil des Problems 1919 von Abdurrahim Yilmaz in *Mathematics Magazine*, Vol. 87, No. 2 (Apr. 2013) erschienen ist.