

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 74 (2019)  
**Heft:** 1

**Artikel:** Über  $k$ -freie Zahlen in arithmetischen Folgen  
**Autor:** Bundschuh, Peter  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-869230>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

---

# Über $k$ -freie Zahlen in arithmetischen Folgen

---

Peter Bundschuh

Der Verfasser studierte Mathematik und Physik in Basel, Hamburg und in Freiburg (Breisgau), wo er 1967 promovierte und sich 1971 habilitierte. 1973 wurde er zum Professor für Mathematik an die Universität Köln berufen. Seine Hauptforschungsinteressen liegen auf dem Gebiet der Zahlentheorie, insbesondere diophantische Approximationen und analytische Zahlentheorie.

## 1 Einleitung und Hauptergebnis

Es sei  $k$  eine feste natürliche Zahl größer als 1. Eine natürliche Zahl heißt  $k$ -frei, wenn sie von keiner  $k$ -ten Potenz einer Primzahl geteilt wird. Im Spezialfall  $k = 2$  spricht man von quadratfreien natürlichen Zahlen. Bekanntlich ist der Anteil der quadratfreien an allen natürlichen Zahlen asymptotisch gleich  $6/\pi^2$  (vgl. [2, Theorem 333]). Scott [6] vermutete, dass der Anteil der *geraden* quadratfreien Zahlen an allen natürlichen Zahlen asymptotisch

Eine natürliche Zahl heisst  $k$ -frei, wenn sie von keiner  $k$ -ten Potenz einer Primzahl geteilt wird. Man weiss beispielsweise, dass der asymptotische Anteil 2-freier (also quadratfreier) Zahlen in  $\mathbb{N}$  gleich  $6/\pi^2$  ist. Im Aufgabenteil dieser Zeitschrift wurde kürzlich ein Problem gestellt, dessen Lösung sich aus einem hier zu zeigenden Satz über die Anzahl  $\mathcal{F}_k(x; q, a)$  der  $k$ -freien natürlichen Zahlen  $\leq x$  ergibt, die  $\equiv a \pmod{q}$  sind. Dabei sind  $q \geq 1$  und  $a$  feste ganze Zahlen mit  $k$ -freiem ggT. Genauer kann man den Grenzwert  $\Phi_k(q, a)$  der relativen Häufigkeit  $\mathcal{F}_k(x; q, a)/x$  bei  $x \rightarrow \infty$  explizit angeben, so dass das Restglied  $\mathcal{F}_k(x; q, a) - \Phi_k(q, a)x$  von der Grössenordnung  $O(x^{1/k})$  ist. Analog zu bekannten Fragen über Primzahlverteilung könnte man aus der vorstehenden Asymptotik eine obere Abschätzung für  $n_0$  gewinnen bzw. die Differenzen  $n_{j+1} - n_j$  bei  $j \rightarrow \infty$  untersuchen, wobei  $(n_j)_{j=0,1,\dots}$  die der Grösse nach geordnete Folge der  $k$ -freien natürlichen Zahlen  $\equiv a \pmod{q}$  bedeutet. Weitere Probleme über die Verteilung der  $k$ -freien Zahlen ergeben sich, wenn man versucht, bei ganzwertiger zahlentheoretischer Funktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  eine Asymptotik für die Anzahlfunktion  $\mathcal{F}_k(x; f) = \#\{n \leq x : f(n) \text{ ist } k\text{-frei}\}$  zu gewinnen, etwa für Polynome, die Teileranzahl- oder die Teilersummenfunktion.

gleich  $2/\pi^2$  ist, das Verhältnis von geraden zu ungeraden quadratfreien Zahlen also asymptotisch gleich 1 zu 2. Diese Vermutung hat Jameson [3] bewiesen und Spilker [7] verallgemeinerte diese Aussage auf beliebige natürliche  $k \geq 2$ , indem er als Aufgabe stellte zu zeigen: Das Verhältnis von geraden zu ungeraden  $k$ -freien Zahlen ist asymptotisch gleich  $2^{k-1} - 1$  zu  $2^{k-1}$ . Diese Aussage ergibt sich unmittelbar aus dem nachgestellten Korollar 2 zu folgendem

**Satz über die Anzahl  $k$ -freier Zahlen in arithmetischen Progressionen.** Für ganze Zahlen  $k, q, a$  mit  $k \geq 2$  und  $q \geq 1$  bezeichne  $\mathcal{F}_k(x; q, a)$  die Anzahl der  $k$ -freien natürlichen Zahlen  $\leq x$ , die kongruent zu  $a$  modulo  $q$  sind. Dann gilt bei  $x \rightarrow \infty$

$$\mathcal{F}_k(x; q, a) = \Phi_k(q, a) \cdot x + O(x^{1/k}) \quad (1)$$

mit

$$\Phi_k(q, a) := \frac{1}{q} \prod_{\substack{p \\ (p^k, q) | a}} \left(1 - \frac{(p^k, q)}{p^k}\right), \quad (2)$$

wobei im Restglied die O-Konstante von  $k, q$  und  $a$  unabhängig gewählt werden kann. Das Produkt in (2) ist über alle Primzahlen  $p$  erstreckt, für die der größte gemeinsame Teiler  $(p^k, q)$  die Zahl  $a$  teilt.

Dass das Produkt rechts in (2) nur von der Restklasse von  $a$  modulo  $q$  abhängt, überlegt man sich leicht: Sind  $a, \bar{a} \in \mathbb{Z}$  modulo  $q$  kongruent und gilt  $(P, q) \mid a$  für ein  $P \in \mathbb{Z}$ , so ist auch  $(P, q) \mid \bar{a}$ .

Weiterhin sei angemerkt, dass der Fall eines nicht  $k$ -freien ggT  $(q, a)$  uninteressant ist: Dann gibt es nämlich eine Primzahl  $p_0$  mit  $p_0^k \mid q$  und  $p_0^k \nmid a$  und so teilt  $p_0^k$  jedes Glied der arithmetischen Folge  $q\mathbb{Z} + a$ , weshalb dann  $\mathcal{F}_k(x; q, a) = 0$  für alle  $x$  gilt. Nach (2) hat man auch  $\Phi_k(q, a) = 0$ , weil  $p_0$  unter den  $p$  mit  $(p^k, q) \mid a$  vorkommt.

Zwei Anwendungen des Hauptsatzes sollen explizit formuliert werden.

**Korollar 1.** Bei ganzen Zahlen  $k, q, a$  mit  $k \geq 2, q \geq 1$  und  $(q, a) = 1$  gilt die asymptotische Formel (1) mit

$$\Phi_k(q, a) = \frac{1}{q\zeta(k)} \prod_{p \mid q} (1 - p^{-k})^{-1}, \quad (3)$$

wobei  $\zeta$  die Riemannsche Zetafunktion bedeutet.

Dies ist eines der frühesten Ergebnisse zum hier behandelten Gegenstand und geht auf Prachar [5] zurück. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass das Zitat dieses Resultats in dem ansonsten sehr informativen Übersichtsartikel [4] über  $k$ -Freiheit inkorrekt ist.

**Korollar 2.** Ist  $k \geq 2, q$  eine Primzahl und  $a$  ganz, so gilt (1) mit

$$\Phi_k(q, a) = \frac{q^{k-1} - \delta(q, a)}{(q^k - 1)\zeta(k)}, \quad (4)$$

wobei  $\delta(q, a)$  gleich 1 oder 0 ist je nachdem, ob  $a$  durch  $q$  teilbar ist oder nicht.

Ist insbesondere  $k \geq 2$  und  $q = 2$ , so erhält man aus Korollar 2 das Spilkersche Resultat in der Form  $\Phi_k(2, 2) : \Phi_k(2, 1) = (2^{k-1} - 1) : 2^{k-1}$ .

## 2 Beweis des Hauptsatzes und beider Korollare

Zwei nützliche Vorbemerkungen

i) Jedes  $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$  kann eindeutig in der Form

$$n = \ell \cdot m^k \quad (5)$$

mit  $m \in \mathbb{N}$  und  $k$ -freiem  $\ell \in \mathbb{N}$  geschrieben werden. Offenbar ist  $n$  genau dann  $k$ -frei, wenn das gemäß (5) zugehörige  $m$  gleich 1 ist.

Bei  $n = 1$  ist ersichtlich  $\ell = 1, m = 1$  zu nehmen. Ist  $n > 1$ , so sei  $\prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$  die kanonische Faktorzerlegung von  $n$  mit paarweise verschiedenen Primzahlen  $p_1, \dots, p_r$  und allen Exponenten  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}$ . Klar ist damit  $\ell = \prod_{i=1}^r p_i^{\beta_i}$  sowie  $m = \prod_{i=1}^r p_i^{\gamma_i}$  mit allen  $\beta_i, \gamma_i \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\beta_i + k\gamma_i = \alpha_i$  und  $\beta_i < k$  für  $i = 1, \dots, r$ .

ii) Hat man für  $n \in \mathbb{N}$  die Darstellung (5) und ist  $d \in \mathbb{N}$ , so gilt die Äquivalenz

$$d^k \mid n \Leftrightarrow d \mid m,$$

die die Gleichung

$$\sum_{d^k \mid n} \mu(d) = \sum_{d \mid m} \mu(d) \quad (6)$$

nach sich zieht;  $\mu$  bedeutet hier die Möbiussche Funktion.

Während nämlich die Implikation  $\Leftarrow$  klar ist, ergibt sich die Umkehrung wie folgt: Hat  $n$  die kanonische Faktorzerlegung wie in i), so zieht  $d^k \mid n$  zunächst  $d = \prod_{i=1}^r p_i^{\delta_i}$  nach sich mit  $\delta_i \geq 0$  und  $k\delta_i \leq \alpha_i$  für  $i = 1, \dots, r$ . Wie in i) gesehen, ist  $\alpha_i = \beta_i + k\gamma_i < k(1 + \gamma_i)$ , also  $\delta_i \leq \gamma_i$  und damit  $d \mid \prod p_i^{\gamma_i} = m$ .

*Beweis des Satzes.* Nach Definition von  $\mathcal{F}_k$ , der Charakterisierung von  $k$ -Freiheit in i) sowie nach (6) ist

$$\mathcal{F}_k(x; q, a) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a(q)}} \left( \sum_{d^k \mid n} \mu(d) \right).$$

Weil hier  $d^k \mid n$  und  $n \leq x$  gelten, ist  $d \leq x^{1/k}$  und durch Vertauschung der beiden Summationen erhält man

$$\mathcal{F}_k(x; q, a) = \sum_{d \leq x^{1/k}} \mu(d) \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a(q), d^k \mid n}} 1 \quad (7)$$

und wegen  $d^k \mid n \Leftrightarrow n = d^k t$  mit eindeutig bestimmtem  $t \in \mathbb{N}$  gilt

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a(q), d^k \mid n}} 1 = \sum_{\substack{t \leq x/d^k \\ d^k t \equiv a(q)}} 1. \quad (8)$$

Bei  $(d^k, q) \nmid a$  hat die Kongruenz  $d^k t \equiv a \pmod{q}$  keine Lösung  $t$  und die Summe rechts in (8) verschwindet. Daher hat man nur die  $d$  weiter zu betrachten, für die  $(d^k, q) \mid a$  gilt.

Für jedes solche  $d$  hat die Kongruenz  $d^k t \equiv a \pmod{q}$  in jeder Folge von  $q/(d^k, q)$  aufeinander folgenden ganzen Zahlen genau eine Lösung. Definiert man dann für jedes  $\xi \in \mathbb{R}_+$  die Zahl  $s(\xi) := [\xi(d^k, q)/q] \in \mathbb{N}_0$ , so ist  $qs(\xi)/(d^k, q) \leq \xi < q(s(\xi) + 1)/(d^k, q)$  und in diesem  $\xi$ -Intervall hat die Kongruenz  $d^k t \equiv a \pmod{q}$  genau eine Lösung. Man vergleicht jetzt den Ausdruck

$$\frac{(d^k, q)}{q} \xi \quad \text{mit} \quad \sum_{\substack{t \leq \xi \\ d^k t \equiv a(q)}} 1,$$

eine Summe, wie sie rechts in (8) auftritt: Die erste Zahl liegt im halboffenen Intervall  $[s(\xi), s(\xi) + 1[$ , die zweite ist entweder gleich  $s(\xi)$  oder gleich  $s(\xi) + 1$ . Also ist für alle  $\xi \in \mathbb{R}_+$

$$\sum_{\substack{t \leq \xi \\ d^k t \equiv a(q)}} 1 = \frac{(d^k, q)}{q} \xi + \rho(\xi) \quad (9)$$

mit einer Restfunktion  $\rho$ , die  $|\rho(\xi)| \leq 1$  genügt.

Kombiniert man nun (7), (8) und (9), so entsteht

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k(x; q, a) &= \sum_{\substack{d \leq x^{1/k} \\ (d^k, q) | a}} \mu(d) \sum_{\substack{t \leq x/d^k \\ d^k t \equiv a(q)}} 1 = \sum_{\substack{d \leq x^{1/k} \\ (d^k, q) | a}} \mu(d) \left( \frac{(d^k, q)}{q} \frac{x}{d^k} + \rho\left(\frac{x}{d^k}\right) \right) \\ &= \frac{x}{q} \sum_{\substack{d \leq x^{1/k} \\ (d^k, q) | a}} \mu(d) \frac{(d^k, q)}{d^k} + O(x^{1/k}) = \frac{x}{q} \sum_{\substack{d=1 \\ p(d^k, q) | a}}^{\infty} \mu(d) \frac{(d^k, q)}{d^k} + O(x^{1/k}), \end{aligned}$$

wo beide O-Konstanten von  $k, q$  und  $a$  unabhängig gewählt werden können.

Definiert man die zahlentheoretische Funktion  $h$  durch  $h(d)$  gleich 1 bzw. 0 genau dann, wenn  $(d^k, q)$  die Zahl  $a$  teilt bzw. nicht teilt, so folgt aus der vorangehenden Formelkette, mit demselben Restglied wie dort zuletzt,

$$\mathcal{F}_k(x; q, a) = \frac{x}{q} \sum_{d=1}^{\infty} h(d) \mu(d) \frac{(d^k, q)}{d^k} + O(x^{1/k}). \quad (10)$$

Hier bleibt die Reihe rechts weiter auszuwerten. Da die zahlentheoretischen Funktionen  $d \mapsto \mu(d)$ ,  $d \mapsto (d^k, q)$  und  $d \mapsto h(d)$  multiplikativ sind, ist auch

$$f : d \mapsto h(d) \mu(d) \frac{(d^k, q)}{d^k}$$

multiplikativ, weshalb die absolut konvergente Reihe in (10) der Produktformel

$$\sum_{d=1}^{\infty} h(d) \mu(d) \frac{(d^k, q)}{d^k} = \prod_p \left( 1 + \sum_{i=1}^{\infty} f(p^i) \right) = \prod_p (1 + f(p)) \quad (11)$$

genügt (vgl. [1, Satz 1.4.3]), das Letztere wegen  $\mu(p^i) = 0$  für  $i > 1$ . Beide Produkte sind hier über alle Primzahlen zu erstrecken. Weil  $f(p) = 0$  bei  $(p^k, q) \nmid a$  bzw.  $f(p) = -(p^k, q)/p^k$  bei  $(p^k, q) \mid a$  gilt, folgt aus (10) und (11)

$$\mathcal{F}_k(x; q, a) = \frac{x}{q} \prod_{\substack{p \\ p(p^k, q) \mid a}} \left(1 - \frac{(p^k, q)}{p^k}\right) + O(x^{1/k})$$

mit demselben Restglied wie in (10).  $\square$

*Beweis von Korollar 1.* Unter der Voraussetzung  $(q, a) = 1$  ist leicht einzusehen, dass für jede Primzahl  $p$  die beiden Aussagen  $(p^k, q) \mid a$  und  $p \nmid q$  äquivalent sind. Die Formel (2) schreibt sich somit als

$$q\Phi_k(q, a) = \prod_{\substack{p \\ p \nmid q}} \left(1 - \frac{(p^k, q)}{p^k}\right) = \prod_{p \nmid q} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right),$$

woraus (3) folgt.  $\square$

*Beweis von Korollar 2.* Bei  $q \nmid a$  ergibt sich (4) aus (3), während man bei  $q \mid a$  durch erneuten Rückgriff auf (2) die Formel

$$q\Phi_k(q, a) = \left(1 - \frac{q}{q^k}\right) \prod_{p \neq q} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right) = \frac{q^k - q}{(q^k - 1)\zeta(k)}$$

bekommt, aus der auch in diesem Fall die Behauptung folgt.  $\square$

## Literatur

- [1] Bundschuh, P., *Einführung in die Zahlentheorie* (6. Aufl.), Springer, Berlin/Heidelberg, 2008.
- [2] Hardy, G.H. and Wright, E.M., *An Introduction to the Theory of Numbers* (2nd ed.), Clarendon Press, Oxford, 1945.
- [3] Jameson, G.J.O., *Even and odd square-free numbers*, Math. Gazette 94 (2010), 123–127.
- [4] Pappalardi, F., *A survey on  $k$ -freeness*, Number Theory, 71–88, Ramanujan Math. Soc. Lect. Notes Ser. 1, Ramanujan Math. Soc., Mysore, 2005.
- [5] Prachar, K., *Über die kleinste quadratfreie Zahl einer arithmetischen Reihe*, Monatsh. Math. 62 (1958), 173–176.
- [6] Scott, J.A., *Square-free integers once again*, Math. Gazette 92 (2008), 70–71.
- [7] Spilker, J., *Aufgabe 1362*, Elem. Math. 72 (2017), 83.

Peter Bundschuh  
 Universität zu Köln  
 Mathematisches Institut  
 Weyertal 86–90  
 D-50931 Köln, Deutschland  
 e-mail: pb@math.uni-koeln.de