

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 74 (2019)
Heft: 1

Artikel: Über eine Interpolation von Mittelwertfunktionen
Autor: Hertzog, Werner
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-869229>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über eine Interpolation von Mittelwertfunktionen

Werner Hertzog

Der Autor hat an der Universität Freiburg i. Ü. Mathematik studiert und ist seit mehr als 30 Jahren in der Versicherungs- und Pensionskassenbranche tätig.

Der Begriff der Mittelwertfunktion für zwei Variablen ist in der Literatur nicht einheitlich definiert. Je nach Bedarf und Zweck werden von den Autoren mehr oder weniger Eigenschaften von einer Mittelwertfunktion gefordert. Für die im Folgenden untersuchten Aussagen wurde eine möglichst allgemeine Definition gewählt, und Eigenschaften wie Kommutativität (manchmal auch Symmetrie genannt), Homogenität oder Stetigkeit werden nicht vorausgesetzt. Diese Zusatzeigenschaften werden schrittweise eingeführt (falls nötig definiert) und untersucht. Wir beginnen mit der

Definition 1. Eine Funktion $M : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ heisst Mittelwertfunktion, wenn für alle $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ gilt

- (M1) aus $x < y$ folgt $x < M(x, y) < y$ und $x < M(y, x) < y$
- (M2) aus $x = y$ folgt $x = M(x, y) = y$.

Das arithmetisch-geometrische Mittel entsteht durch eine rekursive Konstruktion aus dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel und liegt für alle Paare von positiven reellen Zahlen zwischen den beiden Mitteln. Diese Konstruktion wurde bereits von Carl Friedrich Gauß und zuvor schon von Adrien-Marie Legendre verwendet, um die Bogenlängen der Lemniskate und von Ellipsen, also elliptische Integrale, näherungsweise zu berechnen. Auch der bekannte Algorithmus zur schnellen Berechnung der Zahl π von Richard P. Brent und Eugene Salamin aus dem Jahr 1976 beruht auf dem arithmetisch-geometrische Mittel. Dieses Mittel lässt sich nun auf zwei geordnete Mittel (m, M) verallgemeinern. Dabei stellt sich heraus, dass wichtige Eigenschaften auf das implizit definierte Mittel übertragen werden. Es stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen die Stetigkeit der Eltern (m, M) auf den Nachkommen – die neue Mittelwertfunktion – übertragen wird. Der Autor gibt eine erste Antwort.

$M(x, y)$ nennen wir den Mittelwert von x und y . Falls $M(x, y) = M(y, x)$ gilt, nennen wir M kommutativ.

Folgerung 2. Aus der obigen Definition 1 können wir umgekehrt schliessen, dass aus $x = M(x, y)$ bzw. $y = M(x, y)$ auch $x = y$ folgt. Denn aus $x < y$ würde gemäss (M1) auch $x < M(x, y)$ oder $M(x, y) < y$ folgen und dies steht im Widerspruch zur Annahme.

Folgerung 3. Aus einer nicht kommutativen Mittelwertfunktion M können wir zwei kommutative Mittelwertfunktionen M_1 und M_2 konstruieren:

$$M_1(x, y) := \begin{cases} M(x, y) & \text{falls } x \leq y \\ M(y, x) & \text{falls } x > y \end{cases}$$

und

$$M_2(x, y) := \begin{cases} M(y, x) & \text{falls } x \leq y \\ M(x, y) & \text{falls } x > y. \end{cases}$$

Es ist per Definition klar, dass M_1 und M_2 kommutativ sind und die Mittelwerteigenschaften vererben sich von M auf M_1 und M_2 .

Definition 4. Sei M eine Mittelwertfunktion. Wir nennen M homogen, falls für alle $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}_+$ die Gleichung $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda M(x, y)$ gilt.

Folgerung 5. Aus einer nicht homogenen Mittelwertfunktion M können wir zwei homogene Mittelwertfunktionen M_1 und M_2 konstruieren: Wir definieren

$$M_1(x, y) := yM\left(\frac{x}{y}, 1\right) \quad \text{sowie} \quad M_2(x, y) := xM\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Es ist per Definition klar, dass M_1 und M_2 homogen sind und die Mittelwerteigenschaften vererben sich von M auf M_1 und M_2 .

Satz 6. Seien nun m und M zwei Mittelwertfunktionen mit der Eigenschaft $m(x, y) \leq M(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ mit $x < y$; wir schreiben in diesem Fall auch verkürzt $m \leq M$. Wir definieren rekursiv zwei Folgen:

$$\begin{aligned} x_0 &:= x, & x_{n+1} &:= m(x_n, y_n) \\ y_0 &:= y, & y_{n+1} &:= M(x_n, y_n). \end{aligned}$$

Dann sind die Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent und sofern m oder M stetig ist, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Beweis. Aus der Mittelwerteigenschaft von m und M folgt unmittelbar, dass die beiden Folgen streng monoton und beschränkt sind; daraus folgt aus einem bekannten Satz der Analysis, dass sie konvergent sind.

Aus der Stetigkeit von m oder M folgt entweder $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = m(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n)$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = M(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n)$, und aus der Folgerung 2 folgt dann die Gleichheit der Grenzwerte; dabei spielt es keine Rolle, welche Mittelwertfunktion stetig ist. Es genügt, wenn eine der beiden Funktionen stetig ist. \square

Satz 7. Durch die in Satz 6 definierten Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ werden implizit zwei Mittelwertfunktionen $\mu_1(x, y) := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ und $\mu_2(x, y) := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ definiert und es gilt

$$m(x, y) \leq \mu_1(x, y) \leq \mu_2(x, y) \leq M(x, y) \text{ für alle } (x, y) \in \mathbb{R}_+^2.$$

Beweis. Dass μ_1 und μ_2 Funktionen sind, folgt aus der Existenz und Eindeutigkeit des Limes. Dass es auch Mittelwertfunktionen sind, folgt aus folgenden Überlegungen:

Falls $x < y$ gilt, folgt (M1) aus

$$x < m(x, y) = x_1 \leq \mu_1(x, y) \leq \mu_2(x, y) \leq y_1 = M(x, y) < y$$

sowie aus

$$x < m(y, x) = x_1 \leq \mu_1(y, x) \leq \mu_2(y, x) \leq y_1 = M(x, y) < y,$$

und falls $x = y$ und somit $m(x, y) = x$ und $M(x, y) = y$ gilt, werden die beiden definierenden Folgen zu konstanten und identischen Folgen und daraus folgt (M2). \square

Wenn eine der beiden Mittelwertfunktionen m, M stetig ist, dann ist $\mu := \mu_1 = \mu_2$ gemäss Satz 1. In diesem Fall schreiben wir im Folgenden $[m, M] =: \mu$, um die Abhängigkeit von den beiden Mittelwertfunktionen hervorzuheben – sofern dies als nötig erscheint. Aus $\mu_1 = \mu_2$ folgt übrigens nicht, dass m oder M stetig ist, wie wir später sehen werden.

Bemerkung 8. Sind m und M kommutativ oder homogen, dann sind es auch μ_1 und μ_2 . Wir führen den Beweis nur im Fall der Homogenität aus.

Beweis. Sei $\tilde{x}_0 = \lambda x_0$ sowie $\tilde{y}_0 = \lambda y_0$ und die Induktionsannahme ist $\tilde{x}_n = \lambda x_n$ sowie $\tilde{y}_n = \lambda y_n$.

Den Induktionsschritt sehen wir wie folgt:

$$\tilde{x}_{n+1} = m(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = m(\lambda x_n, \lambda y_n) = \lambda m(x_n, y_n) = \lambda x_{n+1}$$

sowie

$$\tilde{y}_{n+1} = M(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = M(\lambda x_n, \lambda y_n) = \lambda M(x_n, y_n) = \lambda y_{n+1}.$$

Daraus folgen

$$\mu_1(\lambda x, \lambda y) := \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda x_n = \lambda \mu_1(x, y)$$

und

$$\mu_2(\lambda x, \lambda y) := \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{y}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda y_n = \lambda \mu_2(x, y). \quad \square$$

Beispiel 9. Das arithmetische Mittel A , das geometrische Mittel G und das harmonische Mittel H sind kommutativ, homogen und stetig und es gilt $G = [H, A]$.

Allgemeiner gilt sogar Folgendes: falls M eine stetige Mittelwertfunktion ist mit $G \leq M$, dann gilt $G = [\frac{G^2}{M}, M]$.

Beweis. G^2/M ist wieder eine Mittelwertfunktion und diese ist kleiner als G . Ferner gilt in diesem Fall für die definierenden Folgen $x_n y_n = x_0 y_0 = xy$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsbeweis) und mit der Stetigkeit von M folgt daraus – die definierenden Folgen haben den gleichen Grenzwert – das Behauptete. \square

Beispiel 10. Sucht man ein Beispiel für zwei (unstetige) Mittelwertfunktionen $m \leq M$, so dass die beiden Mittelwertfunktionen $\mu_1(x, y) := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ und $\mu_2(x, y) := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ verschieden sind, muss man in einem gewissen Sinne das Pferd von hinten aufzäumen. Wir definieren zunächst zwei Folgen reeller Zahlen:

Sei a eine reelle Zahl mit $0 < a < 1$ und $x_n := a^{\frac{n+1}{n+2}}$ sowie $y_n := \frac{1}{x_n}$. Es ist dann klar, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{1}{a}$ gilt. Wir definieren sodann die zwei Mittelwertfunktionen m und M wie folgt:

$$m(x, y) := \frac{x+y}{2} \text{ falls } (x, y) \neq (x_n, y_n) \text{ und } m(x_n, y_n) := x_{n+1} \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

sowie

$$M(x, y) := \frac{x+y}{2} \text{ falls } (x, y) \neq (x_n, y_n) \text{ und } M(x_n, y_n) := y_{n+1} \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Ohne grossen Aufwand zeigt man, dass es sich bei m und M um unstetige Mittelwertfunktionen mit der Eigenschaft $m \leq M$ handelt. Aufgrund der Konstruktion ist $\mu_1\left(\frac{a}{2}, \frac{2}{a}\right) = a$ und $\mu_2\left(\frac{a}{2}, \frac{2}{a}\right) = \frac{1}{a}$ und somit $\mu_1 \neq \mu_2$.

Es stellt sich nun die generelle Frage, ob mit der Stetigkeit von m und M auch jene von μ induziert wird. Gibt es einfache notwendige und hinreichende Bedingungen an m und M , so dass μ stetig ist?

Satz 11. *Seien m und M stetige Mittelwertfunktionen und $m \leq M$. Dann ist μ eine stetige Mittelwertfunktion.*

Beweis. Dass μ eine Mittelwertfunktion ist, haben wir bereits in Satz 7 gezeigt.

Auf einer kompakten Menge K aus \mathbb{R}_+^2 seien Funktionen $f_n, g_n : K \rightarrow \mathbb{R}_+$ wie folgt definiert:

$$f_0(x, y) := x, \quad f_{n+1}(x, y) := m(f_n(x, y), g_n(x, y))$$

und

$$g_0(x, y) := y, \quad g_{n+1}(x, y) := M(f_n(x, y), g_n(x, y)).$$

Jedes Folgeglied ist eine stetige Funktion auf dem Definitionsbereich K , weil dieses aus den stetigen Mittelwertfunktionen m und M , den stetigen Startfunktionen sowie der rekursiven Komposition stetiger Funktionen entsteht.

Ferner konvergieren die Funktionenfolgen f_n (von unten), g_n (von oben) für jedes Element aus dem Definitionsbereich punktweise gegen eine Grenzfunktion μ und schliesslich haben die Funktionenfolgen aufgrund der rekursiven Konstruktion die wichtige Eigenschaft der Monotonie auf dem ganzen Definitionsbereich.

Damit ist μ auf K monotoner Limes stetiger Funktionen und zwar sowohl von unten als auch von oben. Solche Funktionen sind bekanntlich stetig (vgl. dazu [1, Seite 36 bis 41]).

Aus dem bekannten Satz von Dini folgt übrigens, dass die Konvergenz gleichmässig (kom-pakt) ist. \square

Bemerkung 12. Die Stetigkeit von m und M ist also ein hinreichendes Kriterium für die Stetigkeit der Mittelwertfunktion μ .

Es stellt sich nun die Frage, ob es auch ein notwendiges Kriterium ist. Das folgende Beispiel 13 zeigt zuerst, dass nicht ohne weiteres auf die Stetigkeit der Mittelwertfunktionen m oder M verzichtet werden kann.

Beispiel 13. Sei A das arithmetische Mittel und G das geometrische Mittel. Wir definieren

$$m(x, y) := \begin{cases} A(x, y) & \text{falls } x, y \in \mathbb{Q}_+ \\ G(x, y) & \text{sonst.} \end{cases}$$

A ist stetig und m ist unstetig; ferner gilt $m \leq A$. Die beiden Mittelwertfunktionen definieren eine Mittelwertfunktion μ auf eindeutige Weise.

Wir definieren nun eine Folge rationaler Zahlen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $a_n := \sum_{v=0}^n \frac{1}{v!}$.

Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e$ und $m(a_n, 1) = A(a_n, 1)$ für $n \in \mathbb{N}$ und aus der Stetigkeit von A folgt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(a_n, 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(a_n, 1) = \frac{e+1}{2} > \mu(e, 1) = \mu\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, 1\right),$$

weil e bekanntlich eine irrationale Zahl ist. Somit ist μ nicht stetig.

Satz 14. Die Stetigkeit der Mittelwertfunktionen m und M ist keine notwendige Voraussetzung für die Stetigkeit der implizit definierten Mittelwertfunktion μ .

Beweis. Es genügt, dass wir ein Gegenbeispiel geben. Sei A das arithmetische Mittel, G das geometrische und H das harmonische Mittel. Seien $x, x_0, y, y_0 \in \mathbb{R}_+$ und $x_0 \neq y_0$. Wir definieren:

$m(x, y) := G(x, y)$ falls $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ und $(x, y) \neq (y_0, x_0)$ sowie $m(x_0, y_0) := H(x_0, y_0) =: m(y_0, x_0)$,

$M(x, y) := G(x, y)$ falls $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ und $(x, y) \neq (y_0, x_0)$ sowie $M(x_0, y_0) := A(x_0, y_0) =: M(y_0, x_0)$.

M und m sind Mittelwertfunktionen und sie sind unstetig in den Punkten (x_0, y_0) und (y_0, x_0) .

Ferner gilt $m \leq M$. Die durch m und M implizit definierte Mittelwertfunktion μ ist aber stetig auf ganz \mathbb{R}_+^2 , weil $\mu(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = \mu(y_0, x_0)$. Dabei beachte man, dass für die definierenden Folgen $x_n = y_n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $n > 1$ gilt.

Genau genommen sind es wegen der Unstetigkeit von m und M a priori zwei implizite Mittelwertfunktionen μ_1 und μ_2 , aber diese sind auch in den Unstetigkeitspunkten identisch und daraus folgt auch die Stetigkeit. \square

Im Folgenden geben wir ein allgemeineres Beispiel einer ganzen Familie von Mittelwertfunktionen.

Beispiel 15. Wir definieren für $p \in \mathbb{R}$ die Funktionen $A_p(x, y) := \left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{1/p}$ für $x, y \in \mathbb{R}_+$ falls $p \neq 0$ und $A_0 := G$ (geometrisches Mittel). Mit wenig Aufwand kann man zeigen:

- 1) A_p ist eine Mittelwertfunktion für alle $p \in \mathbb{R}$.
- 2) A_p ist kommutativ
- 3) A_p ist homogen
- 4) A_p ist stetig
- 5) $A_p \leq A_q$ falls $p < q$ wobei $p, q \in \mathbb{R}$
- 6) $A_0 = [A_{-p}, A_p]$ für $0 \leq p$
- 7) $A_0^2 = A_{-p} A_p$.

Beweis. Wir beweisen nur den Punkt 6).

A_0^2/A_p ist die Mittelwertfunktion A_{-p} und diese ist kleiner als A_0 . Ferner gilt für die definierenden Folgen $x_n y_n = x_0 y_0 = xy$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsbeweis) und mit der Stetigkeit von A_p (identischer Grenzwert der beiden definierenden Folgen) folgt daraus das Behauptete. \square

Aus 6) folgt, dass wir für $p = 1$ einen quadratisch konvergierenden Algorithmus haben, um aus einer positiven reellen Zahl x die Wurzel zu ziehen; nämlich

$$x^{1/2} := [A_{-1}, A_1](1, x).$$

Das war wahrscheinlich schon Newton bekannt.

Das Beispiel 15 verdanke ich dem Gutachter.

Beispiel 16. Im Allgemeinen können wir für die aus m und M interpolierte Mittelwertfunktion μ keine explizite Form angeben, sondern wir müssen mit den Startwerten (x, y) den Limes der rekursiven Folge berechnen. Im Falle verallgemeinerter arithmetischer Mittel können wir aber eine explizite Form für μ angeben.

Sei $B_\alpha(x, y) := \alpha x + (1 - \alpha)y$ wobei $x \leq y$ und $\alpha \in]0, 1[$. Wir nennen B_α ein verallgemeinertes arithmetisches Mittel. Aus der Definition folgt unmittelbar, dass aus $\alpha > \beta > 0$ die Ungleichung $B_\alpha \leq B_\beta$ folgt. Wir können also $B_\gamma := [B_\alpha, B_\beta]$ bilden und erhalten nach längerer aber einfacher Rechnung für $\gamma = \frac{\beta}{1 - \alpha + \beta}$.

Die Eigenschaft der Eltern, arithmetisch zu sein, vererbt sich also auf die Nachkommen und der Parameter γ berechnet sich aus den Parametern α und β der Eltern.

Ausserdem gilt $B_{1/2} = [B_\alpha, B_{1-\alpha}]$ für $1 < \alpha < 1/2$. Daraus folgt übrigens, dass die Kommutativität der Eltern keine notwendige Voraussetzung für die Kommutativität des Nachkommens ist, weil $B_{1/2}$ kommutativ ist, nicht aber B_α und $B_{1-\alpha}$.

Bemerkung 17. Viele der gängigen Mittelwertfunktionen sind partiell monoton steigend; das heisst, dass eine der beiden Variablen fixiert ist und die daraus entstehende Funktion einer Variablen monoton steigend ist. Auch die Eigenschaft, partiell monoton zu sein, vererbt sich übrigens von den Eltern auf die Nachkommen (einfacher Beweis).

Hier stellt sich eine andere interessante Frage: Könnte die partielle Monotonie der Eltern ausreichen, um den Nachkommen eindeutig zu machen? Falls die Eltern beide homogen sind, dann reicht die partielle Monotonie eines Elternteils tatsächlich aus. Dies sieht man wie folgt.

Beweis. Nehmen wir an $M(z, 1)$ mit $z \in \mathbb{R}_+$ sei monoton steigend.

Für die definierenden Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt

$$x_{n+1} := m(x_n, y_n) = y_n m\left(\frac{x_n}{y_n}, 1\right) = y_n m(z_n, 1)$$

mit $z_n := \frac{x_n}{y_n}$ und

$$y_{n+1} := M(x_n, y_n) = y_n M\left(\frac{x_n}{y_n}, 1\right) = y_n M(z_n, 1)$$

und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton steigend.

Mit Induktion folgt, dass $y_n = y \prod_{v=0}^{n-1} M(z_v, 1)$. Da die definierenden Folgen konvergieren, muss auch das (unendliche) Produkt konvergieren und daraus folgt notwendigerweise, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} M(z_n, 1) = 1$.

Wäre nun $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = u < 1$, dann gäbe es ein $v \in]u, 1[$ und ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass $M(z_v, 1) > M(v, 1)$ und $z_v < v$ für alle $v > N_0$ und dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass $M(z, 1)$ monoton steigend ist. Also ist $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$ und daraus folgt die Gleichheit der Grenzwerte der definierenden Folgen. \square

Im inhomogenen Fall ist die Frage offen.

Zum Schluss danke ich besonders dem sehr geduldigen Gutachter für seine wertvollen Hinweise.

Literatur

[1] O. Forster, *Analysis 3*. Vieweg, zweite überarbeitete Auflage ed., 1983.

Werner Hertzog
 Colombstrasse 39
 CH-3027 Bern
 e-mail: werner.hertzog@bluewin.ch