

# Zur Entstehung der Mengenlehre I : aus Briefen zwischen Richard Dedekind und Georg Canto

Autor(en): **Stammbach, Urs**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **73 (2018)**

Heft 2

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-760282>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

---

---

## Zur Entstehung der Mengenlehre I: Aus Briefen zwischen Richard Dedekind und Georg Cantor

---

---

Urs Stambach

Urs Stambach, \*1939, studierte an der ETH Zürich, wo er 1965 bei Beno Eckmann promovierte. Nach einem mehrjährigen Aufenthalt an der Cornell University in Ithaca, NY wurde er 1969 Professor an der ETH in Zürich. Sein Hauptarbeitsgebiet war die homologische Algebra und deren Anwendungen in der Gruppentheorie, insbesondere in der modularen Darstellungstheorie. Er ist Autor bzw. Mitautor mehrerer Bücher. Seit seiner Emeritierung im Jahre 2005 beschäftigt er sich – intensiver als vorher – mit Geschichte, Literatur und Musik.

Die Geschichte, die hier dargestellt wird,<sup>1</sup> ist in der mathematischen Literatur schon mehrfach erzählt worden, und der vorliegende Text fügt den bekannten Tatsachen nichts Neues hinzu. Es ist allerdings eine spannende Geschichte, denn sie erlaubt es dem Leser und der Leserin, die Entdeckungen der beiden eminenten Mathematiker Schritt für Schritt mitzuvollziehen. So nebenbei lässt sich dabei auch erfahren, mit welcher rasanten Geschwindigkeit sich die Dinge damals, in der beschaulichen guten alten Zeit entwickelt haben.

Der Text beginnt mit Kurzbiographien von Richard Dedekind und Georg Cantor. Im Teil I des Textes geht es anschliessend um die Entdeckung der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen; es ist dies das Resultat, das mit gutem Recht als Geburt der Mengenlehre aufgefasst werden kann. Das Thema von Teil II ist die Entdeckung, dass eine eindeutige Zuordnung zwischen den Punkten der Einheitsstrecke und den Punkten des Einheitsquadrates existiert.

Die Anfänge der Mengenlehre gehen auf zwei Fragen zurück, die Georg Cantor in den 1870er Jahren brieflich an Richard Dedekind gerichtet hat. Anhand der erhaltenen Briefe soll hier in zwei Beiträgen diesen historischen Anfängen nachgegangen werden. Der erste Teil handelt von der Entdeckung der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen und der zweite Teil von der Entdeckung einer eindeutigen Zuordnung zwischen den Punkten der Einheitsstrecke und den Punkten des Einheitsquadrates. Wohl jeder Studierende der Mathematik nimmt diese beiden Resultate bei der ersten Begegnung überrascht und nur mit einiger Skepsis zur Kenntnis. In der Tat benötigt man eine gewisse Zeit, bis man sie ganz verinnerlicht hat. Umso interessanter ist es zu sehen, wie die Entdecker Georg Cantor und Richard Dedekind damit umgegangen sind.

Richard Dedekind und Georg Cantor trafen sich erstmals 1872 zufälligerweise während eines Ferientaufenthaltes in Gersau am Vierwaldstättersee.<sup>2</sup> Cantor war kurz vorher in Halle zum Extraordinarius (ohne Gehalt!) befördert worden; Dedekind wurde im selben Jahr in Braunschweig zum Direktor der Herzoglichen Technischen Hochschule Carolo Wilhelma<sup>3</sup> bestimmt. Offenbar verstanden sich die beiden auf Anhieb. Jedenfalls entwickelte sich in den folgenden Jahren ein reger Briefwechsel der sich – mit Unterbrüchen – über fast dreissig Jahre erstreckte.<sup>4</sup>

**Richard Dedekind** wurde am 6. Oktober 1831 in Braunschweig geboren. Er entstammte einer prominenten Juristenfamilie und wuchs mit zwei Schwestern und einem Bruder in guten Verhältnissen auf. Nach dem Besuch des Gymnasium wechselte er 1848 an das Collegium Carolinum in Braunschweig und nahm dann 1850 das Studium für Mathematik an der Universität in Göttingen auf. Dort promovierte er 1852 bei Carl Friedrich Gauss mit der Arbeit *Über die Theorie der Eulerschen Integrale*. Bereits 1854 habilitierte er sich und war anschliessend von 1854 bis 1858 Privatdozent in Göttingen mit engen Verbindungen zu Gauss und zu dessen Nachfolger Peter Gustav Lejeune Dirichlet wie auch zu seinem Kollegen im Privatdozentenrang Bernhard Riemann. 1858 erhielt er einen Ruf ans Eidgenössische Polytechnikum in Zürich, kehrte aber bereits 1862 als ordentlicher Professor ans Collegium Carolinum, dem Polytechnikum in Braunschweig, in seine Heimatstadt zurück. In mehreren mit Supplementen wachsender Länge versehenen Ausgaben veröffentlichte er Dirichlets *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 1863, 1871, 1879, 1894. Sie enthalten eine Fülle von neuen Begriffen und Resultaten (Ideal, Körper, etc.), die weit über Dirichlets Vorlesungen hinausgehen. 1872 erschien sein Buch *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, in dem er den später nach ihm benannten Dedekindschen Schnitt einführte.<sup>5</sup> Zusammen mit Heinrich Weber<sup>6</sup> gab er die Werke des früh verstorbenen Riemann heraus. Die Zusammenarbeit mit Weber führte zu einer Reihe von Arbeiten, die eine Neubegründung der algebraischen Geometrie möglich machten. 1888 erschien sein Text *Was sind und was sollen die Zahlen?* 1894 wurde er emeritiert; er starb, nach vielfältigen Ehrungen, darunter dem Ehrendoktorat der ETH, am 12. Februar 1916.

**Georg Cantor** wurde am 3. März 1845 in St. Petersburg geboren. Er begann nach dem Besuch der vorbereitenden Schulen in Darmstadt ein Mathematikstudium an der Universität Zürich, wechselte aber bald an die Universität in Berlin. Er promovierte dort 1867 mit einer Dissertation über unbestimmte Gleichungen 2. Grades und habilitierte sich 1869 in Halle. Seine berühmte Arbeit über die Nichtabzählbarkeit der reellen Zahlen erschien 1874. Im Jahre 1879 wurde er Professor in Halle. Leider erlitt Cantor 1884 einen Nervenzusammenbruch und in den folgenden Jahren hatte er periodisch mit psychischen Schwierigkeiten zu kämpfen. Er wurde 1891 erster Präsident der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1895 publizierte Cantor seine *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, eine Kompilation seines Lebenswerkes. In Anerkennung seiner Leistungen erhielt er 1904 die Sylvester-Medaille der Royal Society in London. Er starb am 6. Januar 1918 in Halle.

Der erste Teil der **Geschichte**, die hier zu erzählen ist, beginnt im Jahre 1873 und betrifft die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen. In seinem Brief vom 29. November 1873 legte Cantor Dedekind eine Frage vor, die er trotz längerer Bemühungen nicht hatte beantworten können.<sup>7</sup>

Man nehme den Inbegriff<sup>8</sup> aller positiven ganzzahligen Individuen  $n$  und bezeichne ihn mit  $(n)$ ; ferner denke man sich etwa den Inbegriff aller positiven reellen Zahlgrößen  $x$  und bezeichne ihn mit  $(x)$ ; so ist die Frage einfach die, ob sich  $(n)$  dem  $(x)$  so zuordnen lasse, dass zu jedem Individuum des einen Inbegriffes ein und nur eines des anderen gehört? Auf den ersten Blick sagt man sich, nein es ist nicht möglich, denn  $(n)$  besteht aus discreten Theilen,  $(x)$  aber bildet ein Continuum; nur ist mit diesem Einwande nichts gewonnen und so sehr ich mich auch zu der Ansicht neige, dass  $(n)$  und  $(x)$  keine eindeutige Zuordnung gestatten, kann ich doch den Grund nicht finden und um den ist es mir zu thun, vielleicht ist er ein sehr einfacher.

Wäre man nicht auch auf den ersten Anblick geneigt zu behaupten, dass sich  $(n)$  nicht eindeutig zuordnen lasse dem Inbegriffe  $\left(\frac{p}{q}\right)$  aller positiven rationalen Zahlen  $\frac{p}{q}$ ? und dennoch ist es nicht schwer zu zeigen, dass sich  $(n)$  nicht nur diesem Inbegriffe, sondern noch dem allgemeineren

$$(a_{n_1, n_2, \dots, n_\nu})$$

eindeutig zuordnen lässt, wo  $n_1, n_2, \dots, n_\nu$  unbeschränkte positive ganzzahlige Indices in beliebiger Zahl  $\nu$  sind.

Die Antwort von Dedekind ist nicht erhalten. Immerhin hat Dedekind wenig später in einer Zusammenstellung der Korrespondenz mit Cantor bemerkt, dass er in seinem Antwortbrief den Satz ausgesprochen und vollständig bewiesen habe, dass sogar der Inbegriff aller algebraischen Zahlen sich dem Inbegriffe  $(n)$  der natürlichen Zahlen in der angegebenen Weise zuordnen lässt. Weiteres über den Inhalt der Antwort von Dedekind ergibt sich auch aus dem nachfolgenden Brief von Cantor vom 2. Dezember 1873:

Meine Frage habe ich Ihnen aus dem Grunde vorgelegt, weil ich mich stets im Zweifel darüber befunden habe, ob die Schwierigkeit, welche sich mir bot, eine subjective sei oder ob sie an der Sache hafte. Da Sie mir schreiben, dass auch Sie ausser Stande seien, sie zu beantworten, so darf ich das letztere annehmen. – Uebrigens möchte ich hinzufügen, dass ich mich nie ernstlich mit ihr beschäftigt habe, weil sie kein besonderes practisches Interesse für mich hat und ich trete Ihnen ganz bei, wenn Sie sagen, dass sie aus diesem Grunde nicht viel Mühe verdient. Es wäre nur schön, wenn sie beantwortet werden könnte; z.B., vorausgesetzt dass sie mit nein beantwortet würde, wäre damit ein neuer Beweis des Liouvillschen Satzes geliefert, dass es transcendente Zahlen giebt.<sup>9</sup>

Wie Sie ganz richtig bemerken, lässt unsere Frage folgende Fassung zu: “kann  $(n)$  eindeutig zugeordnet werden einem Inbegriffe:

$$(a_{n_1, n_2, \dots})$$

wo  $n_1, n_2, \dots$  unbeschränkte, positive, ganzzahlige Indices in unendlicher Anzahl sind.”

Am 7. Dezember war Cantor in der Lage, seine ursprünglich gestellte Frage zu beantworten: er lieferte Dedekind einen Beweis, dass sich die ganzen Zahlen nicht bijektiv den reellen Zahlen im Intervall  $[0, 1]$  zuordnen lassen. Nach seinen Aufzeichnungen hat Dedekind Cantor bereits am 8. Dezember eine Vereinfachung vorgeschlagen. Diesen vereinfachten

Beweis veröffentlichte dann Cantor im J. reine angew. Math. 77 (1874), 258–262: *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*.

Die Beschränkung auf *reelle* algebraische Zahlen geschah gegen den expliziten Rat Dedekinds; Cantor begründete sie mit den *hiesigen*, d.h. mit den in Berlin herrschenden Verhältnissen, in denen mit Karl Weierstrass und Karl Wilhelm Borchardt das Crellesche Journal verhaftet war.

Der in dieser Antwort gegebene Beweis wird weiter unten dargestellt. Für den heutigen Leser dürften dabei die folgenden allgemeinen Bemerkungen nützlich sein. In Cantors Brief vom 29. November 1873 wurde wohl zum ersten Mal in der Geschichte der Mathematik festgestellt, dass es – in einem mathematisch präzisen Sinn – verschiedene Niveaus des Unendlichen gibt. Zwar unterschied man schon in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts zwischen dem Begriff des *potentiell Unendlichen* und dem des *aktuell Unendlichen*, wobei nur der erste dieser beiden Begriffe als mathematisch “erlaubt” angesehen wurde. Aber erst Dedekind und Cantor begannen, auch unendliche Mengen (in unserem heutigen Sinn) als “Objekte” anzusehen. Und erst in diesem Rahmen kann eine Frage wie diejenige von Cantor überhaupt gestellt werden. In der Folge führte dies zu einem Paradigmawechsel und zu einer völlig neuen Auffassung mathematischer Objekte, einer Auffassung, die der heutigen Mathematik natürlich geläufig ist.

Zum Beweis der Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen, wie er in der Arbeit von Cantor zu finden ist, sei das folgende erwähnt. Eine algebraische Zahl  $\omega$  erfüllt eine Gleichung der Form

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

wobei  $n, a_0, a_1, \dots, a_n$  ganze Zahlen sind. Dabei seien  $n$  und  $a_0$  positiv, die Koeffizienten seien ohne gemeinsamen Teiler und die Gleichung sei irreduzibel (bei Cantor *irreductibel*). Mit diesen Vorgaben ist zu gegebenem  $\omega$  die Gleichung eindeutig bestimmt. Umgekehrt gehören zu einer Gleichung der obigen Form höchstens  $n$  verschiedene algebraische Zahlen. Zu jedem  $\omega$  lässt sich die *Höhe*  $N(\omega)$  definieren:  $N(\omega) = n - 1 + [a_0] + [a_1] + \dots + [a_n]$ . Es ist klar, dass zu einer vorgegebenen Höhe  $N$  nur endlich viele algebraische Zahlen existieren. Man ordne dann die (reellen) algebraischen Zahlen, indem man mit denjenigen der Höhe 1 beginnt, dann diejenigen der Höhe 2 anschliesst, etc. Dies beweist – in heutiger Sprechweise – die Abzählbarkeit der (reellen) algebraischen Zahlen.

Der Beweis dafür, dass die reellen Zahlen *nicht* abzählbar sind, führt Cantor in der zitierten Arbeit wie folgt. Es sei eine *unendliche Reihe* (sic!) paarweise verschiedener reeller Zahlen gegeben  $\omega_1, \omega_2, \dots$ . Dann lässt sich, so wird behauptet, in jedem vorgegebenen Intervall  $(\alpha, \beta)$  eine Zahl – und damit auch unendlich viele Zahlen – finden, welche in der Reihe nicht vorkommt. Für den Beweis dieser Behauptung bezeichne man die ersten beiden in der Reihe vorkommenden Zahlen, die im vorgegebenen Intervall  $(\alpha, \beta)$  liegen, mit  $\alpha', \beta'$ , dann die ersten beiden in  $(\alpha', \beta')$  liegenden Zahlen der Reihe mit  $\alpha'', \beta''$ , etc. Es sind dann  $\alpha', \alpha''$ , Zahlen der gegebenen Reihe, deren Indizes und deren Grösse fortwährend zunehmen. Und  $\beta', \beta'', \dots$  sind Zahlen der gegebenen Reihe, deren Indizes zunehmen, deren Grösse aber fortwährend abnimmt. Entweder ist nun die Anzahl der so gebildeten Intervalle endlich, das letzte sei  $(\alpha^{(v)}, \beta^{(v)})$ . Dann kann in diesem Intervall eine Zahl genommen werden, welche nicht in der vorgegebenen Reihe enthalten ist. Oder die Anzahl der Intervalle ist unendlich. Dann streben die Zahlen  $\alpha', \alpha'', \dots$  gegen einen Grenzwert

$\alpha^\infty$  und die Zahlen  $\beta', \beta'', \dots$  gegen einen Grenzwert  $\beta^\infty$ . Ist  $\alpha^\infty = \beta^\infty$  (dieser Fall tritt immer auf, wenn die Reihe alle reellen Zahlen enthält), so überzeugt man sich leicht, dass diese Zahl  $\eta = \alpha^\infty = \beta^\infty$  nicht in der vorgegebenen Reihe vorkommen kann. Ist aber  $\alpha^\infty < \beta^\infty$ , so genügt jede Zahl im Intervall  $(\alpha^\infty, \beta^\infty)$  der Bedingung, nicht in der vorgegebenen Reihe vorzukommen.

Heute wird die Nichtabzählbarkeit der reellen Zahlen gewöhnlich mit dem sogenannten Diagonalverfahren bewiesen. Dieses stammt ebenfalls von Cantor, aber er hat es erst später, nämlich im Jahre 1891 entdeckt.

Es ist bereits erwähnt worden, dass einige der Briefe Dedekinds nicht mehr vorhanden sind. An deren Stelle ist aber eine Zusammenstellung aus der Feder Dedekinds erhalten geblieben, nämlich über die Briefe von November und Dezember 1873. Offenbar war Dedekind etwas verärgert, weil Cantor seinen Beitrag in der Veröffentlichung überhaupt nicht anerkannt hatte. Es dürfte sich bei dieser Aufstellung für Dedekind darum gehandelt haben, sich selbst ein möglichst objektives Bild zu verschaffen. Da das Dokument menschlich und auch wissenschaftshistorisch interessant ist, soll hier kurz darauf eingegangen werden.

Dedekind zitiert zuerst aus dem Brief Cantors vom 29. November 1873, in dem die oben erwähnte Frage aufgeworfen wird. Dann sagt er:

*Hierauf habe ich umgehend geantwortet, dass ich die [. . .] Frage nicht entscheiden könnte, zugleich aber den Satz ausgesprochen und vollständig bewiesen, dass sogar der Inbegriff aller algebraischen Zahlen sich dem Inbegriffe (n) der natürlichen Zahlen in der angegebene Weise zuordnen lässt (dieser Satz und Beweis ist bald darauf fast wörtlich, selbst mit dem Gebrauch des Kunstausdrucks Höhe, in die Abhandlung von Cantor in Crelle Bd. 77 übergegangen, nur mit der gegen meinen Rath festgehaltenen Abweichung, dass nur der Inbegriff aller reellen algebraischen Zahlen betrachtet wird.) Die von mir ausgesprochene Meinung aber, dass die [. . .] Frage nicht zu viel Mühe verdiente, weil sie kein besonderes practisches Interesse habe, ist durch den von Cantor gelieferten Beweis für die Existenz transzendenter Zahlen (Crelle Bd. 77) schlagend widerlegt.*

Auf letzteres habe ihn Cantor in seinem Brief vom 2. Dezember 1873 hingewiesen. Dann zitiert er wörtlich aus dem Brief Cantors: “Der von Ihnen gelieferte Beweis, dass sich (n) dem Körper aller algebraischen Zahlen eindeutig zuordnen lasse, ist ungefähr derselbe, wie ich meine Behauptung im vorigen Briefe erklärte.”

Dedekind fährt fort: Am 7. Dezember 1873 *theilt Cantor mir einen strengen, an demselben Tage gefundenen Beweis des Satzes mit, dass der Zahlbegriff aller positiven Zahlen  $\omega < 1$  dem Inbegriff (n) nicht eindeutig zugeordnet werden kann. – Diesen am 8. Dezember erhaltenen Brief beantwortete ich an demselben Tage mit einem Glückwunsch zu dem schönen Erfolg, indem ich zugleich den Kern des Beweises (der noch recht compliciert war) in grosser Vereinfachung “wiederspiegeln” (sic!); diese Darstellung ist ebenfalls fast wörtlich in Cantor’s Abhandlung (Crelle Bd. 77) übergegangen; freilich ist die von mir gebrauchte Wendung “nach Princip Stetigkeit” an der betreffenden Stelle (S. 261, Z. 10–14) vermieden.*<sup>10</sup>

Am 9. Dezember 1873 – so fährt Dedekind in seinem Bericht fort – *schreibt [Cantor] eilig, er habe einen vereinfachten Beweis des Satzes gefunden. Da er meinen Brief nicht erwähnt,*

*so muss letzterer wohl später angekommen sein.* Am 10. Dezember 1873 bestätigt Cantor den Empfang des Briefes von Dedekind, ohne die gegebene Vereinfachung zu erwähnen. Und am 25. Dezember teilt Cantor Dedekind mit, er habe auf Veranlassung von Weierstrass einen Aufsatz mit dem Titel *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen* verfasst. *„Dabei kamen mir, wie Sie später finden werden, Ihre mir so werthen Bemerkungen und Ihre Ausdrucksweise sehr zu statten.“*

Es ist anzufügen, dass Cantor in der Veröffentlichung Dedekind nirgends erwähnt, und es ist offensichtlich, dass Dedekind über das Verhalten des um 14 Jahre jüngeren Cantors ziemlich befremdet war. Dedekind scheint aber eine Auseinandersetzung über diese Frage vermieden zu haben. Die Fortsetzung des gegenseitigen Verhältnisses hat in der Tat nicht gelitten. Der Briefwechsel mit dem intensiven Austausch mathematischer Gedanken dauerte an; Cantor besuchte Dedekind ferner öfter auch persönlich in Braunschweig und in Harzburg<sup>11</sup>, und etwas später versuchte Cantor sogar, Dedekind als Kollegen an die Universität in Halle zu holen. Dedekind lehnte aber ab, wie er dies auch bei zahlreichen anderen Berufungen tat.

Wissenschaftshistorisch muss man festhalten, dass der Briefwechsel eindeutig belegt, dass das Resultat der Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen Dedekind zuzuschreiben ist. Cantor hat bei seiner Veröffentlichung den Namen Dedekinds unterschlagen – aus welchen Gründen, ob absichtlich oder einfach im Überschwang der (Entdecker-)Gefühle, ist kaum mehr auszumachen. Auch später in seinem Leben gab übrigens Cantor an verschiedenen Stellen stets an, die Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen gehe auf ihn zurück.<sup>12</sup> Öffentliche Äusserungen von Dedekind zu dieser Angelegenheit scheint es keine zu geben.

Nur ganz kurze Zeit nach dem erwähnten Briefaustausch, nämlich am 5. Januar 1874, legte Cantor Dedekind in einem Brief eine weitere Frage vor: *Lässt sich eine Fläche (etwa ein Quadrat mit Einschluss der Begrenzung) auf eine Linie (etwa eine gerade Strecke mit Einschluss der Endpunkte) eindeutig beziehen, so dass zu jedem Punkte der Fläche ein Punkt der Linie und umgekehrt zu jedem Punkte der Linie ein Punkt der Fläche gehört?*

Die Entwicklungen, die sich aus dieser Frage ergaben, sollen im zweiten Teil dieses Textes dargestellt werden.

**Dank.** Es ist mir ein Bedürfnis, der Bibliothek der Technischen Universität Braunschweig zu danken. Sie hat mir vor Jahren in völlig unbürokratischer Weise erlaubt, die Originale der Briefe zwischen Dedekind und Cantor einzusehen.

## Anmerkungen

- 1) Der Text geht zurück auf eine Vorlesung zur Geschichte der Mathematik, die ich im Jahre 2003/04 an der ETH gehalten habe. Als Grundlage dieses Abschnittes der Vorlesung diente mir damals vor allem das Buch Walter Purkert, Hans Joachim Ilgauds: *Georg Cantor*, Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner, Band 79, Teubner 1985. Von denselben Autoren ist etwas später unter dem gleichen Titel auch eine umfangreichere und detailliertere Version im Birkhäuser Verlag erschienen. Diese beiden sehr lesenswerten Biographien gehen unter anderem ausführlich auf das hier behandelte Thema ein. Der vorliegende Text hat der entsprechenden Darstellung von Purkert und Ilgauds somit viel zu verdanken.
- 2) Siehe Walter Purkert, Hans Joachim Ilgauds: *Georg Cantor*, S. 28.

- 3) Das Collegium Carolinum in Braunschweig erhielt mit der geplanten Vergrößerung nun diesen neuen Namen.
- 4) Der wesentliche Teil des Briefwechsels ist veröffentlicht in E. Noether und J. Cavaillès: *Briefwechsel Cantor–Dedekind*, Hermann Paris, 1937. Die Originale werden heute in der Bibliothek der Technischen Universität Braunschweig aufbewahrt. – Ferner haben Herbert Meschkowski und Winfried Nilson die Briefe Cantors auf der Grundlage der von Cantor stammenden Kopien herausgegeben: H. Meschkowski, W. Nilson (Hsg.): *Georg Cantor. Briefe*. Springer-Verlag, 1991.
- 5) Dedekind hält im Vorwort dieses Buches fest, dass er die Idee des Dedekindschen Schnittes bereits in Zürich entwickelt hat.
- 6) Heinrich Weber war von 1870 bis 1875 Professor am Eidgenössischen Polytechnikum.
- 7) Für alle im folgenden zitierten Briefe zwischen Dedekind und Cantor siehe E. Noether, J. Cavaillès: *Briefwechsel Cantor–Dedekind*, Hermann Paris, 1937.
- 8) Interessant ist, dass Cantor hier nicht den Term *Menge* verwendet; statt dessen spricht er in diesen Jahren immer von *Inbegriff* oder von *Mannigfaltigkeit*. Der Term *Menge* taucht bei ihm erst später auf.
- 9) Liouville hatte die Existenz unendlich vieler transzendenter Zahlen 1844 angekündigt. Der Beweis wurde 1851 veröffentlicht.
- 10) Unter dem *Princip Stetigkeit* versteht Dedekind hier die Tatsache, dass eine monoton wachsende und beschränkte Folge von reellen Zahlen immer gegen einen Grenzwert konvergiert. Wie Dedekind in seinem Buch *Stetigkeit und irrationale Zahlen* klar macht, ist dieser Satz über die reellen Zahlen, wie sie sich aus seiner Konstruktion mit Hilfe des Dedekindschen Schnittes ergeben, – auch in didaktischer Hinsicht – ganz grundlegend.
- 11) Die Familie Dedekind besass in Harzburg ein Ferienhaus, in dem sich Richard Dedekind oft aufhielt.
- 12) Siehe *Hausdorff Werke*, Band II, S. 589, Anmerkung 24.

Urs Stambach  
Department of Mathematics  
ETH-Zentrum  
CH-8092 Zurich, Switzerland  
e-mail: stambach@math.ethz.ch