

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 73 (2018)
Heft: 2

Artikel: Tetraeder mit inhaltsgleichen Seitenflächen
Autor: Voss, Konrad
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-760278>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Tetraeder mit inhaltsgleichen Seitenflächen

Konrad Voss

Konrad Voss studierte Mathematik zunächst in Berlin und anschliessend an der ETH Zürich, wo er 1956 bei Heinz Hopf promovierte. Bereits 1960 wählte ihn der Bundesrat zum Assistenzprofessor für Mathematik, insbesondere Geometrie, an der ETH Zürich. Nach nur drei Jahren wurde Konrad Voss zum ordentlichen Professor befördert. Er wirkte an der ETH bis zu seiner Emeritierung 1995 in Lehre und Forschung, und auch einige Jahre als Vorsteher der Abteilung für Mathematik und Physik. Er betreute mit unermüdlichem Einsatz die Geometrievorlesungen der Ingenieur-Studiengänge, ein weites Spektrum an Spezialvorlesungen über Differentialgeometrie sowie eine grosse Zahl von Doktorandinnen und Doktoranden. Er tat dies in der ihm eigenen engagierten und hilfsbereiten Art, die das Wohlergehen des Menschen nie aus den Augen verlor. Er war nicht nur als hervorragender Wissenschaftler, sondern auch als langjähriger Kollege allseits sehr geschätzt. Er verstarb am 30. März 2017 in seinem 89. Lebensjahr.

Ein *Tetraeder* im Euklidischen Raum \mathbb{R}^3 wird durch seine vier Eckpunkte festgelegt, das sind vier beliebige Punkte, die nicht in einer Ebene liegen. Je zwei Ecken bestimmen eine der sechs *Kanten*; je drei Ecken legen eine der vier *Seitenflächen* fest. Beim regulären Tetraeder sind alle sechs Kanten gleich lang; die Seitenflächen sind also gleichseitige Dreiecke.

Im Folgenden wird die Frage untersucht, bei welchen Tetraedern alle vier Seitenflächen den gleichen Flächeninhalt haben, und wie sich gegebenenfalls solche Tetraeder geometrisch und analytisch beschreiben lassen. Tetraeder, die sich durch Translation, Drehung oder Spiegelung ineinander überführen lassen, werden als äquivalent betrachtet.

Konrad Voss forschte nicht nur in seinem Spezialgebiet, der Differentialgeometrie, sehr erfolgreich, sondern seine überaus präzise mathematische Intuition führte ihn auch noch bis ins hohe Alter zu überraschenden Resultaten und originellen Beispielen im Bereich der klassischen Geometrie. In der vorliegenden Arbeit, die er bis kurz vor seinem Tod bearbeitete, geht es um die folgende Frage: Ein Dreieck mit drei gleich langen Seiten ist bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt, eben ein gleichseitiges Dreieck. Aber wie sieht es eine Dimension höher aus? Gibt es ausser dem regulären Tetraeder noch weitere Tetraeder mit vier Seitenflächen gleichen Flächeninhalts? Und wenn ja, welche geometrischen Eigenschaften haben solche Tetraeder? Konrad Voss gibt in dieser Arbeit Antworten in unnachahmlich elegantem Stil.

1 Bezeichnungen und Formeln

Im Text werden die folgenden Notationen verwendet:

Punkte oder Vektoren in \mathbb{R}^3 : $X = (x_1, x_2, x_3)$. Dabei sind $x_i \in \mathbb{R}$ die Koordinaten in einem rechtwinkligen „rechtshändigen“ Koordinatensystem mit Ursprung $O = (0, 0, 0)$.

Skalarprodukt: $\langle A, B \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Vektorprodukt: $A \times B = (p_{23}, p_{31}, p_{12})$ mit $p_{ij} = a_ib_j - a_jb_i$.

Für vier Vektoren A, B, C, D gilt die *Lagrangesche Identität*

$$\langle A \times B, C \times D \rangle = \langle A, C \rangle \langle B, D \rangle - \langle A, D \rangle \langle B, C \rangle. \quad (1)$$

Insbesondere gilt

$$\langle A \times B, A \times B \rangle = \langle A, A \rangle \langle B, B \rangle - \langle A, B \rangle^2. \quad (1')$$

(1) ist äquivalent mit

$$(A \times B) \times C = \langle A, C \rangle B - \langle B, C \rangle A. \quad (2)$$

Dreireihige Determinante: $\det(A, B, C) = \langle A \times B, C \rangle = \langle A, B \times C \rangle$.

Länge eines Vektors: $|A| = \sqrt{\langle A, A \rangle}$.

Einheitsvektor E : $|E| = 1$.

Winkel zwischen zwei Vektoren A, B (im Bogenmass): $\sphericalangle(A, B) = \gamma$, $0 \leq \gamma \leq \pi$.

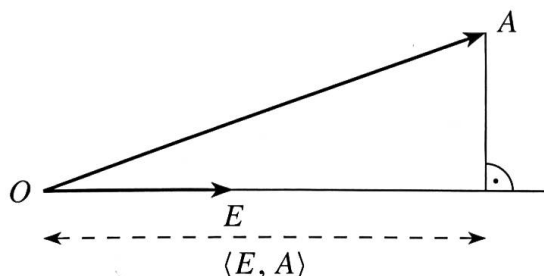
Zusammenhang mit dem Skalarprodukt via Cosinussatz $|A - B|^2 = |A|^2 + |B|^2 - 2\langle A, B \rangle$:
 $\langle A, B \rangle = |A||B| \cos \gamma$. Damit schreibt sich (1') in der Form $|A \times B| = |A||B| \sin \gamma$.

Das ist (falls $\gamma \neq 0$ und $\gamma \neq \pi$) der Flächeninhalt des von den Vektoren A, B aufgespannten Parallelogramms.

Orthogonalität von Vektoren: $A \perp B$ falls $\langle A, B \rangle = 0$.

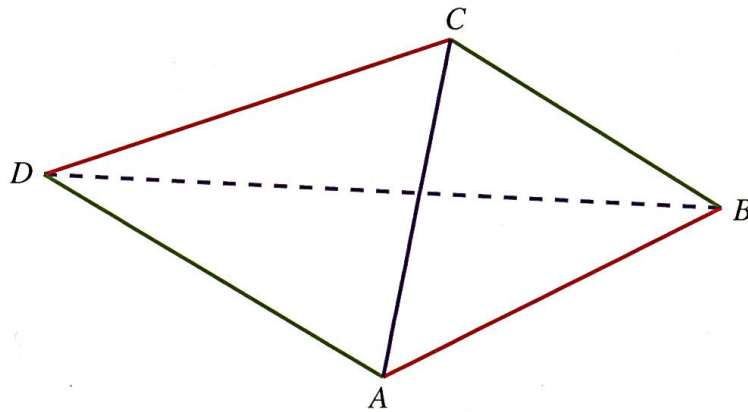
Für linear unabhängige Vektoren A und B gilt $A \times B \perp A$ sowie $A \times B \perp B$ und $\det(A, B, A \times B) > 0$, d.h. das Vektortripel $A, B, A \times B$ ist „rechtshändig“.

Aus $|E| = 1$ folgt: $\langle E, A \rangle$ ist die Länge (mit Vorzeichen) der Orthogonalprojektion der Strecke OA auf die Gerade OE .



Länge der Strecke AB : $|B - A|$.

Flächeninhalt des Dreiecks OAB : $f = \frac{1}{2}|A \times B|$.



Volumen des Tetraeders $OABC$: $v = \frac{1}{6} |\det(A, B, C)|$.

Tetraeder $ABCD$: Drei Paare gegenüberliegender Kanten AB, CD ; AC, BD ; AD, BC .

Schwerpunkt: $P = \frac{1}{2}(A + B)$ und $Q = \frac{1}{2}(C + D)$ sind die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Kanten AB und CD . $S = \frac{1}{4}(A + B + C + D)$ ist der Mittelpunkt der Strecke PQ . Die Verbindungsgeraden der Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten gehen also durch den Schwerpunkt S des Tetraeders.

Umkugel: Die vier Ecken eines Tetraeders liegen auf einer (eindeutig bestimmten) Kugelfläche.

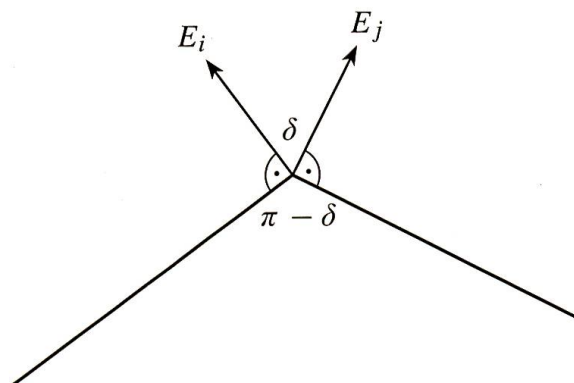
Inkugel: Es gibt eine (eindeutig bestimmte) Kugelfläche mit Zentrum im Innern des Tetraeders, welche alle vier Seitenflächen berührt.

Normalvektoren der Seitenflächen des Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$: i, j, k, l sei eine Permutation der Zahlen $1, 2, 3, 4$. Mit E_i bezeichnen wir einen der beiden Einheitsvektoren orthogonal zur Seitenfläche $A_jA_kA_l$, d.h. $E_i \perp A_j - A_l$ und $\perp A_k - A_l$. Wir nennen E_i den äusseren oder den inneren Normalvektor, je nachdem ob $\langle E_i, A_i - A_l \rangle < 0$ oder > 0 ist.

Winkel an einer Tetraederkante: Die Seitenflächen $A_jA_kA_l$ und $A_iA_kA_l$ mit den äusseren (oder den inneren) Normalvektoren E_i und E_j haben die Kante A_kA_l gemeinsam. Dann erhält man:

$$\text{Aus } \langle E_i, E_j \rangle = \cos \delta \text{ folgt:} \quad (3)$$

$\kappa = \pi - \delta$ ist der Winkel zwischen den Seitenflächen an der Kante A_kA_l .



f_i sei der Flächeninhalt des Dreiecks $A_j A_k A_l$. Dann erfüllen die äusseren (und ebenso die inneren) Normalvektoren die folgende grundlegende Relation

$$f_1 E_1 + f_2 E_2 + f_3 E_3 + f_4 E_4 = 0. \quad (4)$$

Eine analoge Gleichung gilt sogar für alle konvexen Polytope im Euklidischen \mathbb{R}^n ($n \geq 2$). Für den Tetraeder $OABC$ folgt (4) aus der Identität

$$A \times B + B \times C + C \times A + (C - A) \times (B - A) = 0.$$

2 Notwendige Bedingungen

Lemma 1. *Bei jedem Tetraeder mit inhaltsgleichen Seitenflächen sind die Winkel an gegenüberliegenden Kanten gleich.*

Beweis. Nach (4) sind Tetraeder mit inhaltsgleichen Seitenflächen durch die Eigenschaft

$$E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = 0 \quad (5)$$

charakterisiert. Es sei

$$c_{ij} = \langle E_i, E_j \rangle \quad \text{für alle } i \neq j.$$

Mit einer Indexpermutation i, j, k, l schreiben wir (5) in der Form $E_i + E_j = -(E_k + E_l)$. Wegen $\langle E_i + E_j, E_i + E_j \rangle = 2 + 2c_{ij}$ folgt daraus

$$c_{ij} = c_{kl}$$

und damit wegen (3) die Gleichheit der beiden Winkel. \square

Entscheidend ist nun das folgende duale

Lemma 2. *Bei jedem Tetraeder mit inhaltsgleichen Seitenflächen sind gegenüberliegende Kanten gleich lang. Für solche Tetraeder $OABC$ gilt also*

$$|A| = |B - C|, \quad |B| = |C - A|, \quad |C| = |A - B|. \quad (6)$$

Dazu beweisen wir

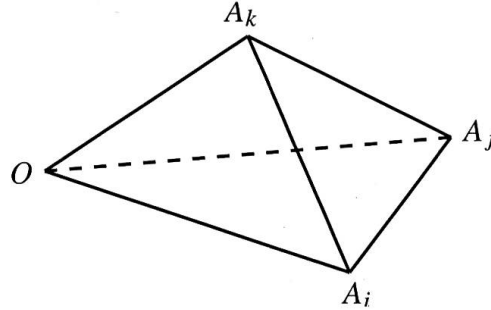
Lemma 3. *In einem Tetraeder mit inhaltsgleichen Seitenflächen sei c die Länge einer Kante und κ der Winkel zwischen den anstossenden Seitenflächen. Dann gilt*

$$\sin \kappa = \lambda c \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{3v}{2f^2}.$$

Dabei bezeichnet v das Volumen des Tetraeders und f den Flächeninhalt der Seitenflächen.

Da der Faktor λ für alle Kanten den gleichen Wert hat, folgt Lemma 2 aus Lemma 1 und Lemma 3.

Beweis von Lemma 3. Durch eine geeignete Translation und Nummerierung der Ecken können wir zum Tetraeder $OA_1A_2A_3$ übergehen, und zwar so, dass OA_3 die betrachtete Kante ist und $\det(A_1, A_2, A_3) > 0$. i, j, k sei eine der drei zyklischen Permutationen 1, 2, 3 oder 2, 3, 1 oder 3, 1, 2.



Dann ist

$$E_i = \frac{1}{2f}(A_j \times A_k) \quad (7)$$

der innere Normalvektor der Seitenfläche OA_jA_k . Umgekehrt folgt aus (7)

$$E_i \times E_j = \frac{1}{4f^2}(A_j \times A_k) \times (A_k \times A_i).$$

Mit $A = A_j$, $B = A_k$, $C = A_k \times A_i$ ergibt sich $\langle A, C \rangle = \det(A_j, A_k, A_i) = 6v$ und $\langle B, C \rangle = 0$, also nach Formel (2)

$$E_i \times E_j = \lambda A_k, \quad \lambda = \frac{3v}{2f^2}. \quad (8)$$

Mit $\sphericalangle(E_1, E_2) = \delta$ und $|A_3| = c$ erhält man für den Winkel κ an der Kante OA_3 :

$$\sin \kappa = \sin(\pi - \delta) = \sin \delta = |E_1 \times E_2| = \lambda c. \quad \square$$

Auf Grund der Gleichung (6) von Lemma 2 folgt

Theorem 1. $OABC$ sei ein Tetraeder mit inhaltsgleichen Seitenflächen. Es sei

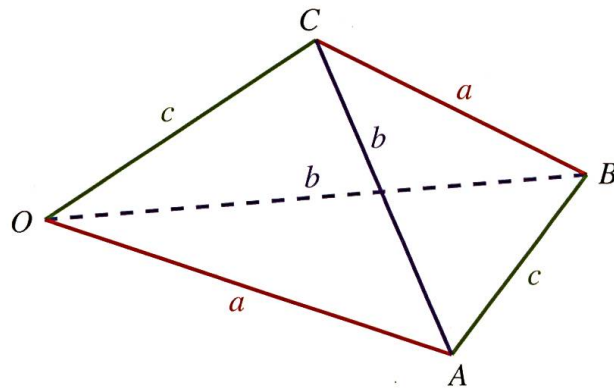
$$|A| = a, \quad |B| = b, \quad |C| = c \quad \text{und} \quad \sphericalangle(B, C) = \alpha, \quad \sphericalangle(C, A) = \beta, \quad \sphericalangle(A, B) = \gamma$$

an der Ecke O . Dann sind alle vier Seitenflächen Dreiecke mit Seitenlängen a, b, c ; die Seitenflächen sind also nicht nur inhaltsgleich, sondern sogar kongruent. Ausserdem gilt $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

α, β, γ sind nämlich zugleich die Winkel im Dreieck ABC .

Wir nennen einen Tetraeder *gleichseitig*, wenn die vier Seitenflächen kongruent sind. Alle Tetraeder mit inhaltsgleichen Seitenflächen sind also gleichseitig.

Theorem 2. Der Tetraeder $OABC$ ist dann und nur dann gleichseitig, wenn gegenüberliegende Kanten gleich lang sind.



Einerseits folgt nämlich aus der Kongruenz gegenüberliegender Kanten die Kongruenz der Seitenflächen; andererseits enthält Lemma 2 die Aussage, dass die Kongruenz der Seitenflächen in jedem Fall die Kongruenz gegenüberliegender Kanten nach sich zieht. Dies kann auch leicht direkt eingesehen werden (drei Fälle: a, b, c drei verschiedene Zahlen oder $a = b \neq c$ oder $a = b = c$).

Die Frage ist, ob für die Kantenlängen a, b, c beliebige Werte möglich sind. Eine notwendige Bedingung ist die folgende:

Lemma 4. *In jedem gleichseitigen Tetraeder sind die Winkel in den Seitenflächen kleiner als $\frac{\pi}{2}$; die Seitenflächen sind also spitzwinklige Dreiecke.*

Beweis. $OA_1A_2A_3$ sei der betrachtete Tetraeder. Die Gleichung (5) ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass $E_1 + E_2 + E_3$ ein Vektor der Länge 1 ist, also $\langle E_1 + E_2 + E_3, E_1 + E_2 + E_3 \rangle = 1 = 3 + 2(c_{12} + c_{13} + c_{23})$, d.h.

$$c_{12} + c_{13} + c_{23} = -1 \quad \text{mit} \quad -1 < c_{ij} < 1. \quad (9)$$

Nach (8), (1) und (9) ergibt sich

$$\begin{aligned} \lambda^2 \langle A_1, A_2 \rangle &= \langle E_2 \times E_3, E_3 \times E_1 \rangle = c_{23}c_{13} - c_{12} = c_{23}c_{13} + c_{23} + c_{13} + 1 \\ &= (c_{23} + 1)(c_{13} + 1) > 0. \end{aligned} \quad \square$$

3 Konstruktion der allgemeinen Lösung

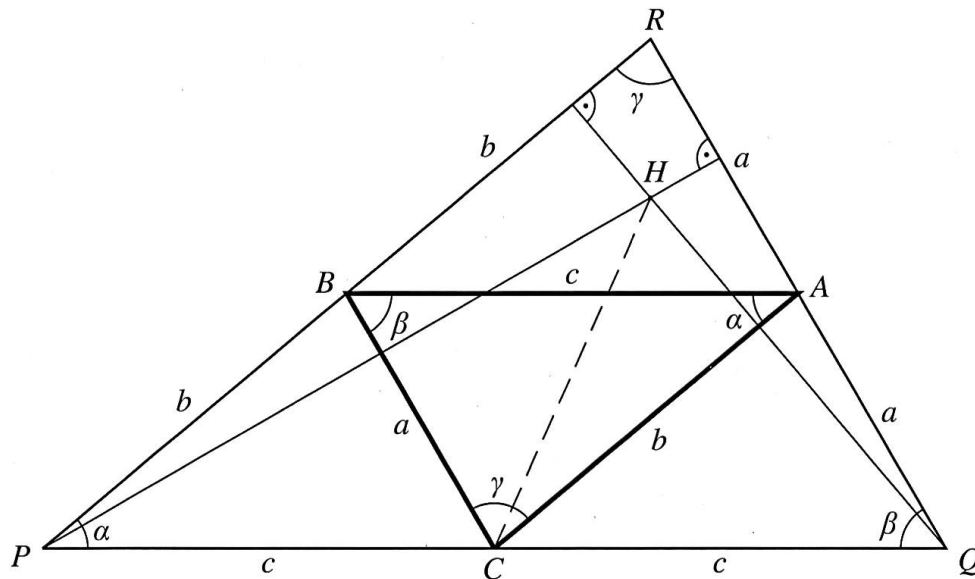
a, b, c seien reelle Zahlen mit

$$0 < a \leq b \leq c \quad \text{und} \quad a^2 + b^2 > c^2. \quad (10)$$

Aus (10) folgt $a + b > c$. Wie lässt sich daraus ein gleichseitiger Tetraeder mit den Kantenlängen a, b, c konstruieren?

PQR sei ein Dreieck in einer „horizontalen“ Ebene mit Seitenlängen $|Q - R| = 2a$, $|R - P| = 2b$, $|P - Q| = 2c$. Für die Winkel α, β, γ an den Ecken P, Q, R gilt wegen (10)

$$0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma < \frac{\pi}{2}. \quad (10')$$



An Stelle von a, b, c kann man auch c und die Winkel α, β vorgeben mit

$$0 < \alpha \leq \beta, \quad \alpha + 2\beta \leq \pi, \quad \alpha + \beta > \frac{\pi}{2}. \quad (10'')$$

A, B, C seien die Mittelpunkte der Strecken QR, RP, PQ . Durch die Strecken AB, BC, CA wird das Dreieck PQR in vier Dreiecke mit Seitenlängen a, b, c zerlegt.

H sei der Höhenschnittpunkt von PQR . Wegen (10'') liegt H im Innern des Vierecks $ARBC$. Wir bringen den Punkt P durch Drehung um die Achse BC in den Punkt D vertikal über H . Dann gilt (da B und C bei der Drehung fest bleiben) $|D - B| = |P - B| = b$ und $|D - C| = |P - C| = c$.

Analog drehen wir Q um die Achse AC und erhalten den Punkt D' vertikal über H . Dann ist $D' = D$, denn im rechtwinkligen Dreieck HDC ist $|D - H|^2 = c^2 - |H - C|^2 = |D' - H|^2$. Somit ist $|D - A| = |Q - A| = a$.

$ABCD$ ist der gesuchte gleichseitige Tetraeder.

4 Bestimmung der Eckpunkte

Lemma 5. Zu jedem Tetraeder $OABC$ gibt es eindeutig bestimmte Vektoren U, V, W so, dass

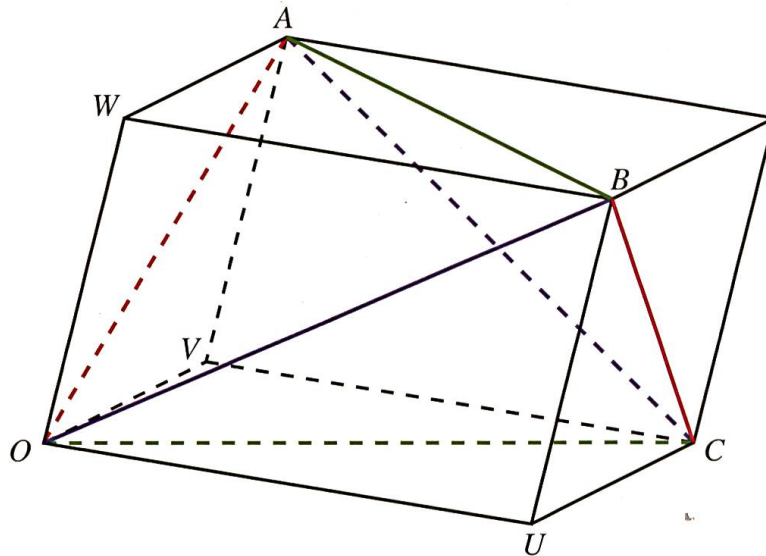
$$\begin{aligned} A &= V + W, \\ B &= U + W, \\ C &= U + V. \end{aligned} \quad (11)$$

Beweis. Aus (11) folgt

$$U = \frac{1}{2}(-A + B + C), \quad V = \frac{1}{2}(A - B + C), \quad W = \frac{1}{2}(A + B - C). \quad (11')$$

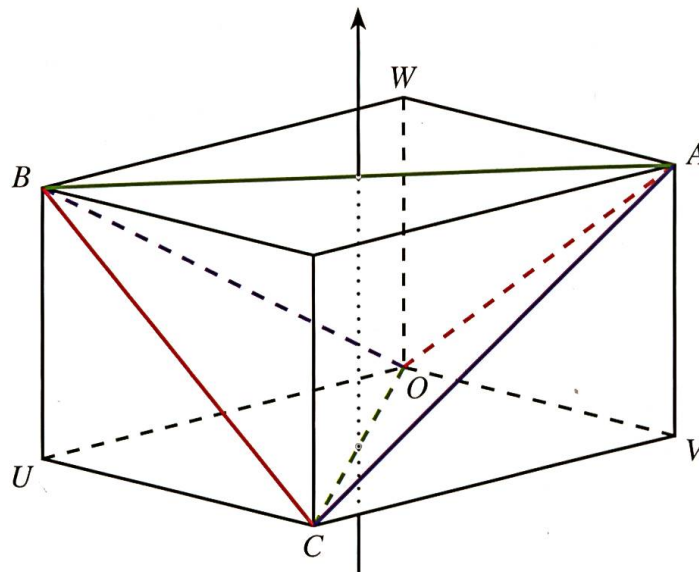
Die Vektoren U, V, W sind also eindeutig bestimmt. Umgekehrt folgt (11) aus (11'). \square

Gemäss (11) lässt sich jeder Tetraeder $T = OABC$ aus drei linear unabhängigen Vektoren U, V, W erzeugen. Wir nennen das von U, V, W aufgespannte Parallelepiped \mathcal{P} das *erzeugende Parallelepiped* von T . \mathcal{P} wird von sechs Parallelogrammen begrenzt; die Kanten von T sind Diagonalen dieser Parallelogramme.



Theorem 3. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:

- Der Tetraeder $T = OABC$ ist gleichseitig.
- Die Vektoren U, V, W sind paarweise orthogonal, d.h. das erzeugende Parallelepiped \mathcal{P} von T ist ein Quader, die Seitenflächen von \mathcal{P} sind Rechtecke.
- Die drei Verbindungsgeraden der Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten von T sind paarweise orthogonal.



Beweis. Nach Theorem 2 ist T dann und nur dann gleichseitig, wenn die Gleichungen (6) erfüllt sind, also gilt nach Lemma 5 z.B.

$$\begin{aligned} |A|^2 &= |V + W|^2 = |V|^2 + |W|^2 + 2\langle V, W \rangle \\ &= |C - B|^2 = |V - W|^2 = |V|^2 + |W|^2 - 2\langle V, W \rangle \iff \langle V, W \rangle = 0 \end{aligned}$$

und analog für U, W und U, V . Also sind (a) und (b) äquivalent.

Nach (11') ist U Differenzvektor der Kantenmitten $\frac{1}{2}A$ und $\frac{1}{2}(B + C)$; die Verbindungsgerade dieser Punkte ist also parallel zur Geraden OU . Entsprechendes gilt für V und W . Also sind (b) und (c) äquivalent. \square

Nach Theorem 3 können wir U, V, W auf die Form bringen

$$U = (2x, 0, 0), \quad V = (0, 2y, 0), \quad W = (0, 0, 2z) \quad \text{mit } x, y, z > 0.$$

Damit erhalten wir

Theorem 4. *Die Formeln*

$$A = (0, 2y, 2z), \quad B = (2x, 0, 2z), \quad C = (2x, 2y, 0) \quad (12)$$

mit positiven x, y, z liefern alle gleichseitigen Tetraeder $T = OABC$.

T hat den Schwerpunkt $S = (x, y, z)$. Die Translation $X \mapsto X - S$ führt S in O und O in $-S$ über.

Theorem 4'. *Die Formeln*

$$\begin{aligned} A_1 &= (-x, y, z), \\ A_2 &= (x, -y, z), \\ A_3 &= (x, y, -z), \\ A_4 &= (-x, -y, -z) \end{aligned} \quad (12')$$

mit positiven x, y, z liefern alle gleichseitigen Tetraeder $T' = A_1A_2A_3A_4$; dabei gilt

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0 \quad \text{und} \quad |A_i| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{für alle } i. \quad (13)$$

5 Symmetrieeigenschaften gleichseitiger Tetraeder

Die acht Punkte $(\pm x, \pm y, \pm z)$ sind Ecken eines Quaders Q mit Kanten parallel zu den Koordinatenachsen, Kantenlängen $2x, 2y, 2z$ und Seitenflächen orthogonal zu den Koordinatenachsen. Die Tetraederecken (12') sind diejenigen Ecken von Q , bei denen eine ungerade Anzahl Koordinaten negativ ist; die übrigen Ecken $-A_i$ von Q liefern den an O gespiegelten Tetraeder. Die Mittelpunkte der Tetraederkanten sind die Punkte $(\pm x, 0, 0)$, $(0, \pm y, 0)$, $(0, 0, \pm z)$ auf den Koordinatenachsen.

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ seien die Drehungen um die Koordinatenachsen mit Winkel π , d.h. – anders ausgedrückt – die Spiegelungen an den Koordinatenachsen.

Theorem 5. *T sei der Tetraeder mit Ecken (12'). Dann werden die Ecken von T bei den Drehungen φ_i permutiert; T wird also auf sich abgebildet. Jede Ecke von T lässt sich in jede andere Ecke, jede Seitenfläche in jede andere Seitenfläche und jede Kante in die gegenüberliegende Kante überführen.*

Beweis. i, j, k sei eine Permutation von 1, 2, 3. Bei A_i ist die i te Koordinate negativ, die beiden anderen Koordinaten sind positiv. Bei φ_k bleibt die k te Koordinate eines Punktes ungeändert, während die beiden anderen Koordinaten mit -1 multipliziert werden. φ_k bewirkt also die folgende Eckenpermutation:

$$\varphi_k : A_i \leftrightarrow A_j, \quad A_k \leftrightarrow A_4.$$

Dabei geht $A_i A_j A_k$ über in $A_i A_j A_4$ und $A_i A_k$ in die gegenüberliegende Kante $A_j A_4$. \square

Theorem 6. *Ein Tetraeder ist dann und nur dann gleichseitig, wenn der Schwerpunkt mit dem Zentrum der Umkugel zusammenfällt.*

Beweis. Nach Theorem 4', Formel (13) hat jeder gleichseitige Tetraeder die genannte Eigenschaft.

Umgekehrt sei T ein Tetraeder, bei dem O Schwerpunkt und Zentrum der Umkugel ist, für den also (13) gilt mit einer Zahl r für alle i . Durch die gleiche Überlegung wie beim Beweis von Lemma 1 folgt dann zunächst

$$|A_i + A_j|^2 = 2r^2 + 2\langle A_i, A_j \rangle = |A_k + A_l|^2,$$

also $\langle A_i, A_j \rangle = \langle A_k, A_l \rangle$, und damit

$$|A_i - A_j|^2 = 2r^2 - 2\langle A_i, A_j \rangle = |A_k - A_l|^2.$$

T ist also gleichseitig. \square

Die gleichseitigen Tetraeder lassen sich folgendermassen zu Paaren zusammenfassen:

Dualitätssatz. $T = T(x, y, z)$ sei der Tetraeder mit Ecken (12') und $T^* = T(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z})$. r und r^* seien die zugehörigen Umkugelradien, ρ und ρ^* die Radien der Inkugeln, E_i beziehungsweise E_i^* die inneren Normalvektoren und A_i^* die Ecken von T^* . Dann gilt:

$$E_i = \frac{1}{r^*} A_i^*, \quad \rho = \frac{1}{r^*}; \quad E_i^* = \frac{1}{r} A_i, \quad \rho^* = \frac{1}{r}.$$

Beweis. Für die Skalarprodukte erhält man

$$\langle A_i^*, A_j \rangle = -1 \quad \text{für alle } i \neq j, \quad \langle A_i^*, A_i \rangle = 3.$$

Daher ist für drei verschiedene Indizes $\langle A_i^*, A_j - A_k \rangle = 0$. Folglich ist A_i^* orthogonal zur Seitenfläche $A_j A_k A_l$. Da $\langle A_i^*, A_i - A_j \rangle = 4$ ist, hat A_i^* die Richtung des inneren Normalvektors E_i . Aus Symmetriegründen hat O von allen Seitenflächen den Abstand $\rho = \langle -E_i, A_j \rangle = \frac{1}{r^*}$. Wegen $(T^*)^* = T$ gelten die entsprechenden Formeln für E_i^* und ρ^* . \square

Gleichseitige Tetraeder sind in der mathematischen Literatur immer wieder untersucht worden. Interessierte Leserinnen und Leser seien an dieser Stelle auf das Literaturverzeichnis verwiesen.

Aufgaben

1. Man zeige, dass bei gleichseitigen Tetraedern bei mindestens zwei Paaren gegenüberliegender Kanten die Winkel zwischen den Seitenflächen kleiner als 90° sind.
2. Die Seitenflächen eines gleichseitigen Tetraeders seien gleichschenklige Dreiecke mit Seitenlängen $a = b < c$ und Winkeln $\alpha = \beta < \gamma$. Für welche Werte von γ ist der Winkel an der längeren Kante grösser, gleich oder kleiner als 90° ?
3. Man untersuche, für welche Tetraeder sich die vier Höhen in einem Punkt schneiden.

Dank

Wir bedanken uns bei Daniel Perez für die Erstellung der Figuren und der \LaTeX -Version dieser Arbeit.

Literatur

- [1] ALTSHILLER-COURT, NATHAN: *Modern pure solid geometry*. Second edition. Chelsea Publishing Co., New York, 1964.
- [2] HAZEWINKEL, M. (Herausgeber): *Encyclopaedia of mathematics. Supplement. Vol. I*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.
- [3] KUPITZ, YAAKOV S. und MARTINI, HORST: *The Fermat–Torricelli point and isosceles tetrahedra*. J. Geom., 49(1-2):150–162, 1994.
- [4] SCHUMANN, HEINZ: *Elementare Tetraedergeometrie: eine Einführung in die Raumgeometrie*. Verlag Franzbecker, Hildesheim, 2011.
- [5] STURM, RUDOLF: *Maxima und Minima in der elementaren Geometrie*. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1910.